

51.627  
W Z H

479535

# Z变换与差分方程

王泽汉 编  
龙文庭

哈尔滨工业大学出版社



# Z变换与差分方程

王泽汉 龙文庭 编

哈尔滨工业大学出版社

# **Z变换与差分方程**

王泽汉 龙文庭 编

•

哈尔滨工业大学出版社出版发行

哈尔滨船舶工程学院印刷厂印刷

•

开本 787×1092 1/32 印张 5.625 字数 121,000

1985年1月第1版 1985年1月第1次印刷

印数 1—10,000

书号 13341·5 定价 1.40元

## 前 言

用  $Z$  变换解差分方程, 实质上就是将差分方程转化为代数方程来解。它同拉普拉斯变换解微分方程一样, 是一种有效的方法。在自动控制理论中, 是处理线性定常离散系统的一个重要方法。

本书对  $Z$  变换的概念、理论与方法, 作了较系统而全面的介绍。汇集、推算了较完整的  $Z$  变换表。最后, 并给出了关于差分方程的算子解法。

本书可供有关专业的教师、科技人员、工程技术人员、自学者学习参考之用。由于编者的水平与经验所限, 不当之处, 在所难免。请读者勿吝批评指正。

本书经杨克劭同志校阅, 并提出宝贵意见, 在此致谢。

编 者

1984.10

# 目 录

§1. 差分方程概念 .....	( 1 )
§2. 差分方程解法举例 .....	( 5 )
§3. $Z$ 变换的定义及简单例子 .....	( 8 )
§4. $Z$ 变换与拉氏变换的关系 .....	(10)
§5. $Z$ 变换的性质 .....	(15)
§6. 性质汇总, $Z$ 变换表 .....	(23)
§7. 反 $Z$ 变换 .....	(30)
§8. 反 $Z$ 变换的求法 .....	(37)
§9. $Z$ 变换表 (续) .....	(56)
§10. 反 $Z$ 变换的数字例子 .....	(62)
§11. 用 $Z$ 变换解不带右端项的常系数线性差分方程 .....	(71)
§12. 带右端项的一阶常系数线性差分方程的解 .....	(90)
§13. 带右端项的二阶常系数线性差分方程的解 .....	(102)
§14. 带右端项的 $n$ 阶常系数线性差分方程的解 .....	(136)
§15. 向量型一阶差分方程的解 .....	(155)
§16. 算子法解常系数线性差分方程 .....	(158)

## § 1 差分方程概念

如同微分方程用来表明模拟信号的系統那样，差分方程则用来表明离散信号的系統。由于差分方程容易在数字计算机上处理，并且比较容易解出，所以差分方程可用来逼近微分方程。

作为数字逼近的一个例子，我们可用一个向前差来逼近一个函数在一个已知点的导数，即

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=kT} \approx \frac{y(kT+T) - y(kT)}{T} \quad (1.1)$$

其中  $T (T > 0)$  选为某一个很小的值使(1.1)是一个足够近似的等式。用(1.1)，我们可将一阶微分方程

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = f(t) \quad (1.2)$$

在  $t = kT$  时用

$$\frac{y(kT+T) - y(kT)}{T} + ay(kT) = f(kT) \quad (1.3)$$

来逼近。方程(1.3)可写成

$$\frac{1}{T} y(kT+T) + \left(a - \frac{1}{T}\right) y(kT) = f(kT) \quad (1.4)$$

此为一阶差分方程，其中  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ 。

一般，一个  $n$  阶常系数线性差分方程为

$$a_0 y(kT + nT) + a_1 y(kT + nT - T) + \cdots + a_{n-1} y(kT + T) + a_n y(kT) = f(kT) \quad (1.5)$$

其中  $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n$  均为常数， $k = 0, 1, 2, 3, \cdots$ ，而  $n$  为固定的自然数， $n \geq 1$ 。又  $y(iT)$  表  $y$  在时刻  $iT$  的值， $i$  为自然数或 0。 $i$  为负时， $y(iT) = 0$ 。

方程(1.5)是  $n$  阶差分方程。其所以称为  $n$  阶是因为在方程中出现的最高差为  $nT$ 。我们可用下述方法把(1.5)化成一组包含  $n$  个未知数列的  $n$  个一阶差分方程。为了给  $n$  个未知数列编号，我们改写  $x_1(kT) = y(kT)$ ，并令

$$x_2(kT) = x_1(kT + T) [= y(kT + T)]$$

$$x_3(kT) = x_2(kT + T) [= y(kT + 2T)]$$

.....

$$x_n(kT) = x_{n-1}(kT + T) [= y(kT + nT - T)]$$

把末式中  $kT$  换为  $kT + T$ ，可有

$$x_n(kT + T) = x_{n-1}(kT + 2T) [= y(kT + nT)]$$

于是(1.5)可写成

$$\begin{aligned} x_n(kT + T) = & -\frac{a_n}{a_0} x_1(kT) - \frac{a_{n-1}}{a_0} x_2(kT) - \cdots \\ & - \frac{a_1}{a_0} x_n(kT) + \frac{1}{a_0} f(kT) \end{aligned}$$

从而改写  $x_1(kT) = y(kT)$ ，可见(1.5)等价于一组  $n$  个一阶差分方程

$$x_2(kT) = x_1(kT + T)$$

$$x_3(kT) = x_2(kT + T)$$

.....

$$x_n(kT) = x_{n-1}(kT + T)$$

$$x_n(kT + T) = -\frac{a_n}{a_0} x_1(kT)$$

$$- \frac{a_{n-1}}{a_0} x_2(kT) - \dots - \frac{a_1}{a_0} x_n(kT)$$

$$+ \frac{1}{a_0} f(kT)$$

(1.6)

我们把(1.6)写成向量—矩阵型。令

$$\vec{x}(kT) = \begin{pmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ x_3(kT) \\ \dots \\ x_n(kT) \end{pmatrix}$$

(1.7)

这是  $n \times 1$  状态向量。又令

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{a_n}{a_0} & -\frac{a_{n-1}}{a_0} & -\frac{a_{n-2}}{a_0} & \dots & -\frac{a_1}{a_0} & 0 \end{pmatrix}$$

(1.8)

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1/a_0 \end{pmatrix}$$

(1.9)



它们分别是  $n \times n$  矩阵和  $n \times 1$  矩阵。于是(1.6)可写成

$$\vec{x}(kT + T) = \vec{A} \vec{x}(kT) + \vec{B} f(kT)$$

欲证此，注意

$$\vec{x}(kT + T) = \begin{pmatrix} x_1(kT + T) \\ x_2(kT + T) \\ x_3(kT + T) \\ \dots\dots\dots \\ x_{n-1}(kT + T) \\ x_n(kT + T) \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

并且由矩阵乘法有

$$\vec{A} \vec{x}(kT) = \begin{pmatrix} x_2(kT) \\ x_3(kT) \\ x_4(kT) \\ \dots\dots\dots \\ x_n(kT) \\ -\frac{a_n}{a_0} x_1(kT) - \frac{a_{n-1}}{a_0} x_2(kT) - \dots \\ -\frac{a_1}{a_0} x_n(kT) \end{pmatrix}$$

$$\vec{B} f(kT) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{a_0} f(kT) \end{pmatrix}$$

它们是三个 $n \times 1$ 矩阵。由矩阵加法和矩阵相等的定义，可见(1.6)等价于(1.10)。

## § 2 差分方程解法举例

我们考察一个简单的例子。设有一阶差分方程

$$x(kT + T) + 2x(kT) = 0 \quad (2.1)$$

试求 $x(kT)$ 。

我们可用递推法求出 $x(kT)$ ：于(2.1)令 $k = 0$ ，可有

$$x(T) + 2x(0) = 0$$

故

$$x(T) = -2x(0)$$

于(2.1)令 $k = 1$ ，可有

$$x(2T) + 2x(T) = 0$$

故

$$x(2T) = -2x(T) = (-2)^2 x(0)$$

再于(2.1)令 $k = 2$ 得

$$x(3T) + 2x(2T) = 0$$

故

$$x(3T) = -2x(2T) = (-2)^3 x(0)$$

于是我们可归纳出

$$x(kT) = (-2)^k x(0) \quad (2.2)$$

而由(2.1)可有

$$x(kT + T) = -2x(kT)$$

以(2.2)代入之可得

$$x[(k+1)T] = (-2)^{k+1} x(0)$$

这与(2.2)有相同的形式，(以 $k+1$ 代(2.2)的 $k$ )，故(2.2)



即为所求之解。由  $x(0)$  的任意性，这解可写成

$$x(kT) = C(-2)^k,$$

$C$  为常数，即  $C$  与  $k$  无关。

称此解为(2.1)的通解。

这种方法虽然可普遍应用，但对于二阶或更高阶的差分方程，要归纳出通解就繁杂得多。

类似于用拉氏变换解常系数线性微分方程一样，可用  $z$  变换解常系数线性差分方程。还是拿(2.1)作例子。我们以

$z^{-k}$  遍乘 (2.1)，然后取和  $\sum_{k=0}^{\infty}$ ，可有

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(kT+T)z^{-k} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = 0 \quad (2.3)$$

假定收敛。每一个和显然是  $z$  的函数。如果设

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = X(z) \quad (2.4)$$

则令  $k+1 = k'$ ，可有

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT+T)z^{-k} &= \sum_{k'=1}^{\infty} x(k'T)z^{-k'+1} \\ &= z \sum_{k'=1}^{\infty} x(k'T)z^{-k'} = z \left[ \sum_{k'=0}^{\infty} x(k'T)z^{-k'} - x(0) \right] \\ &= z [X(z) - x(0)] \end{aligned} \quad (2.5)$$

以(2.4)及(2.5)代入(2.3)可有

$$z[X(z) - x(0)] + 2X(z) = 0$$

由此解得

$$X(z) = \frac{zx(0)}{z+2} \quad (2.6)$$

我们再把(2.6)展开为  $z^{-1}$  的幂级数。为此，把(2.6)写成

$$X(z) = \frac{1}{1+2z^{-1}} x(0)$$

如果  $|2Z^{-1}| < 1$ , 即  $|Z| > 2$ , 则可有展开式

$$X(z) = x(0) \sum_{k=0}^{\infty} (-2)^k z^{-k} \quad (2.7)$$

将(2.7)与(2.4)比较, 可立刻得到

$$x(kT) = x(0)(-2)^k$$

由此可见, 用上面的方法得到的结果和用递推方法得到的结果(2.2)相同。

这里的主要作法是采用变换(2.4), 其中  $X(Z)$  就称为  $x(kT)$  的  $z$  变换, 它类似拉氏变换

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

注意对于一阶差分方程, 我们以后将要用到性质(2.5), 即

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(kT+T) z^{-k} = z[X(z) - x(0)]$$

而对二阶差分方程, 以后还将用到:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT+2T) z^{-k} &= \sum_{k'=2}^{\infty} x(k'T) z^{-k'+2} \quad (k' = k+2) \\ &= z^2 \left[ \sum_{k'=0}^{\infty} x(k'T) z^{-k'} - x(0) - x(T) z^{-1} \right] \\ &= z^2 [X(z) - x(0) - x(T) z^{-1}] \end{aligned} \quad (2.8)$$

一般, 以后还将用到

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT+nT) z^{-k} &= \sum_{k'=n}^{\infty} x(k'T) z^{-k'+n} \quad (k' = k+n) \\ &= z^n \sum_{k'=n}^{\infty} x(k'T) z^{-k'} \\ &= z^n [X(z) - x(0) - x(T) z^{-1} - \cdots - x(nT-T) z^{-n+1}] \end{aligned} \quad (2.9)$$

公式(2.5), (2.8), (2.9)称为时间平移公式。(参阅§5)



### § 3 Z变换的定义及简单例子

设

$$0, T, 2T, 3T, \dots, kT, \dots \quad (3.1)$$

表示等时差的时间序列,  $T$  表示两相邻时间的间隔 ( $T$  一般比较小)。再设

$$\begin{aligned} x(0), x(T), x(2T), x(3T), \dots, \\ x(kT), \dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

表某信号  $x$  在(3.1)中各时刻的离散值。

定义

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} \quad (3.3)$$

为  $x(kT)$  的  $z$  变换。我们并采用运算记号  $Z$

$$Z[x(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} = X(z) \quad (3.4)$$

这里  $z$  表复数。假定级数(3.3)在某圆  $|z| > R$  内收敛(参阅 §7)。(3.3)是  $z^{-1} = 1/z$  的幂级数, 即  $z$  的负幂级数。

我们看几个简单例子。

例1.  $x(kT) = 1$

按(3.4), 在  $|z| > 1$  时, 得 1 的  $z$  变换为

$$Z[1] = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-k} = \frac{1}{1 - (1/z)} = \frac{z}{z - 1} \quad (3.5)$$

例2.  $x(kT) = \mu^k$ ,  $\mu$  为常数, 可为复数。

按(3.4), 可见在  $|z| > |\mu|$  时, 得  $\mu^k$  的  $z$  变换为

$$Z[\mu^k] = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (\mu/z)^k =$$

$$\frac{1}{1 - (\mu/z)} = \frac{z}{z - \mu} \quad (3.6)$$

特别,  $\mu = 1$ , 给出例 1。

$$\mu = -1 \text{ 给出 } -1 \text{ 的 } z \text{ 变换为 } Z[(-1)^k] = \frac{z}{z + 1}$$

$$\mu = e^{-aT} \text{ 给出 } e^{-akT} \text{ 的 } z \text{ 变换为 } Z[e^{-akT}] = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

$$\mu = 0, \text{ 认为 } \mu^k = \begin{cases} 1, & \text{在 } k = 0 \\ 0, & \text{在 } k = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

则(3.6)仍成立。

例3.  $x(kT) = kT$

按(3.4), 可有: 在  $|z| > 1$  时给出  $kT$  的  $z$  变换为

$$\begin{aligned} Z[kT] &= \sum_{k=0}^{\infty} kT z^{-k} = Tz \sum_{k=0}^{\infty} k z^{-k-1} \\ &= -Tz \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dz} (z^{-k}) = -Tz \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \\ &= -Tz \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{1 - (1/z)} \right) = -Tz \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{z - 1} \right) \\ &= -Tz \frac{-1}{(z - 1)^2} = \frac{Tz}{(z - 1)^2} \end{aligned} \quad (3.7)$$

例4. 于 (3.6) 中换  $\mu$  为  $\mu e^{j\omega T}$  (此后,  $\mu$  及  $\omega$  均为实数  $j = \sqrt{-1}$ ), 可有

$$\begin{aligned} Z[\mu^k e^{j\omega kT}] &= \frac{z}{z - \mu e^{j\omega T}} \\ &= \frac{z(z - \mu e^{-j\omega T})}{(z - \mu e^{j\omega T})(z - \mu e^{-j\omega T})} \end{aligned}$$



$$= \frac{z \{ (z - \mu \cos \omega T) + j \mu \sin \omega T \}}{z^2 - 2z \mu \cos \omega T + \mu^2}$$

分开实部及虚部（ $z$  看作实数），可得  $\mu^k \cos(\omega k T)$ ， $\mu \sin(\omega k T)$  的  $z$  变换分别为

$$Z \left[ \mu^k \cos(\omega k T) \right] = \frac{z(z - \mu \cos \omega T)}{z^2 - 2z \mu \cos \omega T + \mu^2}$$

$$Z \left[ \mu^k \sin(\omega k T) \right] = \frac{z \mu \sin \omega T}{z^2 - 2z \mu \cos \omega T + \mu^2}$$

特别， $\mu = 1$ ，可有  $\cos(\omega k T)$ ， $\sin(\omega k T)$  的  $z$  变换分别为

$$Z \left[ \cos(\omega k T) \right] = \frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$$

$$Z \left[ \sin(\omega k T) \right] = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$$

$\mu = -1$ ，可有  $(-1)^k \cos(k \omega T)$ ，及  $(-1)^k \sin(\omega k T)$  的  $z$  变换分别为

$$Z \left[ (-1)^k \cos(\omega k T) \right] = \frac{z(z + \cos \omega T)}{z^2 + 2z \cos \omega T + 1}$$

$$Z \left[ (-1)^k \sin(\omega k T) \right] = \frac{-z \sin \omega T}{z^2 + 2z \cos \omega T + 1}$$

## § 4 Z变换与拉氏变换的关系

在§2中，我们已经指出： $z$  变换

$$Z[x(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} \quad (4.1)$$

## 类似拉氏变换

$$L[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (4.2)$$

连续自变量的函数  $x(t)$  相应于离散变量  $x(kT)$ 。

积分  $\int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$  相应求和  $\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}$

因子  $e^{-st}$  相应因子  $z^{-k}$ 。

要得到两变换的本质联系，须借助于单位脉冲函数。

定义：单位脉冲函数

$$\delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{dt}, & (dt > 0), \text{ 在 } t = 0 \\ 0, & \text{在别处} \end{cases}$$

从而

$$\delta(t - kT) = \begin{cases} \frac{1}{dt}, & (dt > 0), \text{ 在 } t = kT \\ 0, & \text{在别处} \end{cases}$$

据此，它们的拉氏变换分别为

$$L[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = \frac{1}{dt} \cdot 1 \cdot dt = 1 \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \text{及 } L[\delta(t - kT)] &= \int_0^{\infty} \delta(t - kT)e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{dt} e^{-skT} dt = e^{-skT} \end{aligned} \quad (4.4)$$

从数列

$$x(0), x(T), x(2T), \dots, x(kT), \dots$$

作脉冲函数表示

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT) \quad (4.5)$$



按(4.4)可得出 $x^*(t)$ 的拉氏变换

$$L[x^*(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-skT} \quad (4.6)$$

在(4.6)中令

$$z = e^{sT} \quad (4.7)$$

亦即

$$s = -\frac{1}{T} \ln z \quad (4.8)$$

即得 $x(kT)$ 的 $z$ 变换

$$Z[x(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} \quad (4.9)$$

因此

$$\begin{aligned} Z[x(kT)] &= [\text{脉冲函数 } x^*(t) \text{ 的拉氏变换}]_{e^{sT}=z} \\ &= \left[ \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-ksT} \right]_{e^{sT}=z} \end{aligned} \quad (4.10)$$

应当指出：(4.10)与(4.9)即(4.1)，并没有本质区别。如果对(4.10)的和式各项作出代换 $e^{sT}=z$ ，那末(4.10)就成为(4.9)。但把无限和化为封闭式时，(4.10)方括号中的和可能比(4.9)中的和稍方便些。我们讨论§3中的四个例子。对于例1，例2，例4，两种和化为封闭式，大致相同。对于例3，(4.10)中的和化为封闭式稍简。对此例， $x(kT)=kT$ ，(4.10)中的和为

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} kT e^{-skT} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{ds} (-e^{-skT}) = -\frac{d}{ds} \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-sT})^k \\ &= -\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{1-e^{-sT}} \right) = \frac{T e^{-sT}}{(1-e^{-sT})^2} = \frac{T e^{sT}}{(e^{sT}-1)^2} \end{aligned}$$

换 $e^{sT}$ 为 $z$ 得

$$Z[kT] = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

同(3.7). 这里稍简。

再增加三个例子。

例1.  $x(kT) = (kT)^2$  (4.10)中的和为

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (kT)^2 e^{-skT} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^2}{ds^2} e^{-skT} = \frac{d^2}{ds^2} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-skT} \\ &= \frac{d^2}{ds^2} \frac{1}{1-e^{-sT}} = \frac{d}{ds} \frac{-Te^{-sT}}{(1-e^{-sT})^2} \\ &= -T \frac{d}{ds} \frac{e^{sT}}{(e^{sT}-1)^2} = -T \frac{(e^{sT}-1)e^{sT}T - e^{sT}2e^{sT}T}{(e^{sT}-1)^3} \\ &= T^2 \frac{e^{sT}(e^{sT}+1)}{(e^{sT}-1)^3} \end{aligned}$$

换 $e^{sT} = z$ , 得

$$Z = [(kT)^2] = \frac{T^2 z (z+1)}{(z-1)^3} \quad (4.11)$$

例2.  $x(kT) = (kT)^3$  (4.10)中的和为

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-skT} &= \sum_{k=0}^{\infty} (kT)^3 e^{-skT} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^3}{ds^3} e^{-skT} \\ &= - \frac{d^3}{ds^3} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-skT} = - \frac{d^3}{ds^3} \frac{1}{1-e^{-sT}} = - \frac{d^3}{ds^3} \frac{e^{sT}}{e^{sT}-1} \\ &= \frac{d^2}{ds^2} \frac{Te^{sT}}{(e^{sT}-1)^2} = T \frac{d}{ds} \frac{(e^{sT}-1)e^{sT}T - e^{sT}2e^{sT}T}{(e^{sT}-1)^3} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= -T^2 \frac{d}{ds} \frac{e^{2sT} + e^{sT}}{(e^{sT} - 1)^3} \\
&= -T^2 \frac{(e^{sT} - 1)(2e^{2sT} + e^{sT})T - (e^{2sT} + e^{sT})3e^{sT}T}{(e^{sT} - 1)^4} \\
&= T^3 \frac{e^{3sT} + 4e^{2sT} + e^{sT}}{(e^{sT} - 1)^4}
\end{aligned}$$

换  $e^{sT} = z$ , 得

$$Z[(kT)^3] = T^3 \frac{z^3 + 4z^2 + z}{(z - 1)^4} \quad (4.12)$$

例3.  $x(kT) = (kT)^n$ ,  $n$  为自然数。  
(4.10)中的和为

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} (kT)^n e^{-skT} &= (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^n}{ds^n} e^{-skT} \\
&= (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-skT} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \frac{1}{1 - e^{-sT}} \\
&= (-1)^n \left[ \frac{\partial^n}{\partial s^n} \frac{1}{1 - e^{-(s+\lambda)T}} \right]_{\lambda=0} \\
&= (-1)^n \left[ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \frac{1}{1 - e^{-(s+\lambda)T}} \right]_{\lambda=0} \\
&= (-1)^n \left[ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \frac{e^{sT}}{e^{sT} - e^{-\lambda T}} \right]_{\lambda=0}
\end{aligned}$$

换  $e^{sT} = z$  得

$$Z[(kT)^n] = (-1)^n \left[ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \frac{z}{z - e^{-\lambda T}} \right]_{\lambda=0} \quad (4.13)$$

## § 5 Z 变换的性质

### (一) 可加性

$$Z[x(kT) + y(kT)] = Z[x(kT)] + Z[y(kT)]$$

即两数列和的  $z$  变换等于两数列的  $z$  变换之和。

$$\begin{aligned} \text{证} \quad Z[x(kT) + y(kT)] &= \sum_{k=0}^{\infty} [x(kT) + y(kT)] z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} y(kT) z^{-k} \\ &= Z[x(kT)] + Z[y(kT)] \quad (\text{假定两级数收敛}) \end{aligned}$$

### (二) 齐次性

设  $a$  为常数, 则

$$Z[ax(kT)] = aZ[x(kT)]$$

即一数列乘以常数  $a$  的  $z$  变换等于此数列的  $z$  变换乘以  $a$ 。

$$\begin{aligned} \text{证} \quad Z[ax(kT)] &= \sum_{k=0}^{\infty} ax(kT) z^{-k} \\ &= a \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} = aZ[x(kT)] \end{aligned}$$

推论.  $c_1, c_2, \dots, c_p$  为  $p$  个常数,

$x_1(kT), x_2(kT), \dots, x_p(kT)$  为  $p$  个数列,

则

$$Z\left[\sum_{i=1}^p c_i x_i(kT)\right] = \sum_{i=1}^p c_i Z[x_i(kT)]$$

称为线性性质。特别,

$$Z[x(kT) - y(kT)] = Z[x(kT)] - Z[y(kT)]$$

$$\text{例1. } Z[1 - e^{-akT}] = Z[1] - Z[e^{-akT}]$$

$$= \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-aT}}$$



$$= \frac{z(1 - e^{-aT})}{(z - 1)(z - e^{-aT})}$$

### (三) 时间的平移

设  $n$  为固定的自然数, 则

$$Z[x(kT - nT)] = z^{-n}Z[x(kT)] \quad (5.1)$$

$$Z[x(kT + nT)] = z^n \left\{ Z[x(kT)] - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k} \right\} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad Z[x(kT - nT)] &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT - nT)z^{-k} \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} x(kT - nT)z^{-k} \quad (\text{设 } x(-T) = x(-2T) = \cdots = 0) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x(k'T)z^{-k'-n} \quad (k' = k - n) \\ &= z^{-n} \sum_{k'=0}^{\infty} x(k'T)z^{-k'} = z^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} \\ &= z^{-n}Z[x(kT)] \end{aligned}$$

这就证明了(5.1)。注意在证明过程中我们用到

$$x(-T) = 0, \quad x(-2T) = 0, \quad \cdots, \quad x(-nT) = 0$$

故(5.1)应更确切地写成

$$Z[x_1(kT)] = z^{-n}Z[x(kT)]$$

其中

$$x_1(kT) = \begin{cases} x(kT - nT), & \text{在 } k \geq n \\ 0, & \text{在 } k = 0, 1, 2, \cdots, n-1 \end{cases}$$

再证(5.2)

$$\begin{aligned} Z[x(kT + nT)] &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT + nT)z^{-k} \\ &= \sum_{k'=n}^{\infty} x(k'T)z^{n-k'} \quad (k' = k + n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= z^n \sum_{k'=n}^{\infty} x(k'T) z^{-k'} \\
&= z^n \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT) z^{-k} \right\} \\
&= z^n \left\{ Z[x(kT)] - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT) z^{-k} \right\}
\end{aligned}$$

即(5.2)得证。

#### (四) 复扩张

若  $Z[x(kT)] = X(z)$ ，则对于任何常数  $\mu \neq 0$  ( $\mu$  可为复数)，可有

$$Z[\mu^k x(kT)] = X(z/\mu)$$

$$\begin{aligned}
\text{证} \quad Z[\mu^k x(kT)] &= \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k x(kT) z^{-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) (z/\mu)^{-k} = X(z/\mu)
\end{aligned}$$

例如，由  $Z[1] = \frac{z}{z-1}$ ，可得出

$$Z[\mu^k] = \frac{z/\mu}{(z/\mu)-1} = \frac{z}{z-\mu}$$

$$Z[(-\mu)^k] = \frac{z}{z+\mu}$$

又如，由  $Z[kT] = \frac{Tz}{(z-1)^2}$ ，可得

$$Z[\mu^k kT] = \frac{T(z/\mu)}{[(z/\mu)-1]^2} = \frac{T\mu z}{(z-\mu)^2}$$

$$Z[(-\mu)^k kT] = -\frac{T\mu z}{(z+\mu)^2}$$

又由  $Z[(kT)^2] = T^2 \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$ , 可有

$$\begin{aligned} Z[\mu^k(kT)^2] &= T^2 \frac{(z/\mu)[(z/\mu)+1]}{[(z/\mu)-1]^3} \\ &= T^2 \frac{\mu z(z+\mu)}{(z-\mu)^3} \end{aligned}$$

$$Z[(-\mu)^k(kT)^2] = -T^2 \frac{\mu z(z-\mu)}{(z+\mu)^3}$$

由  $Z[(kT)^3] = T^3 \frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$ , 可有

$$Z[\mu^k(kT)^3] = T^3 \frac{\mu z(z^2+4\mu z+\mu^2)}{(z-\mu)^4}$$

$$Z[(-\mu)^k(kT)^3] = T^3 \frac{-\mu z(z^2-4\mu z+\mu^2)}{(z+\mu)^4}$$

由  $Z[(kT)^n] = (-1)^n \left[ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \frac{z}{z-e^{-\lambda T}} \right]_{\lambda=0}$

可有  $Z[\mu^k(kT)^n] = (-1)^n \left[ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \frac{z}{z-\mu e^{-\lambda T}} \right]_{\lambda=0}$

$$Z[(-\mu)^k(kT)^n] = (-1)^n \left[ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \frac{z}{z+\mu e^{-\lambda T}} \right]_{\lambda=0}$$

特别,  $Z[(-1)^k(kT)^n] = (-1)^n \left[ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \frac{z}{z+e^{-\lambda T}} \right]_{\lambda=0}$

最后, 由



$$Z[\mu^k \cos(\omega k T)] = \frac{z(z - \mu \cos \omega T)}{z^2 - 2z\mu \cos \omega T + \mu^2}$$

$$Z[\mu^k \sin(\omega k T)] = \frac{\mu z \sin \omega T}{z^2 - 2z\mu \cos \omega T + \mu^2}$$

换  $\mu$  为  $\mu e^{-aT}$ , 可得

$$Z[\mu^k e^{-akT} \cos(\omega k T)] = \frac{z(z - \mu e^{-aT} \cos \omega T)}{z^2 - 2z\mu e^{-aT} \cos \omega T + \mu^2 e^{-2aT}}$$

$$Z[\mu^k e^{-akT} \sin(\omega k T)] = \frac{z\mu e^{-aT} \sin \omega T}{z^2 - 2z\mu e^{-aT} \cos \omega T + \mu^2 e^{-2aT}}$$

### (五) 卷积

设有两数列  $x(kT)$  及  $y(kT)$

定义:

$$(x * y)(kT) = \sum_{i=0}^k x(iT) y(kT - iT)$$

为  $x(kT)$  及  $y(kT)$  的卷积。左端  $(x * y)(kT)$  是卷积的记号。

显然

$$\begin{aligned} (x * y)(kT) &= \sum_{i=0}^k x(iT) y(kT - iT) \\ &= x(0)y(kT) + x(T)y(kT - T) + \cdots + x(kT)y(0) \\ &= \sum_{i=0}^k y(iT) x(kT - iT) \\ &= (y * x)(kT) \end{aligned}$$

即卷积满足互换律。

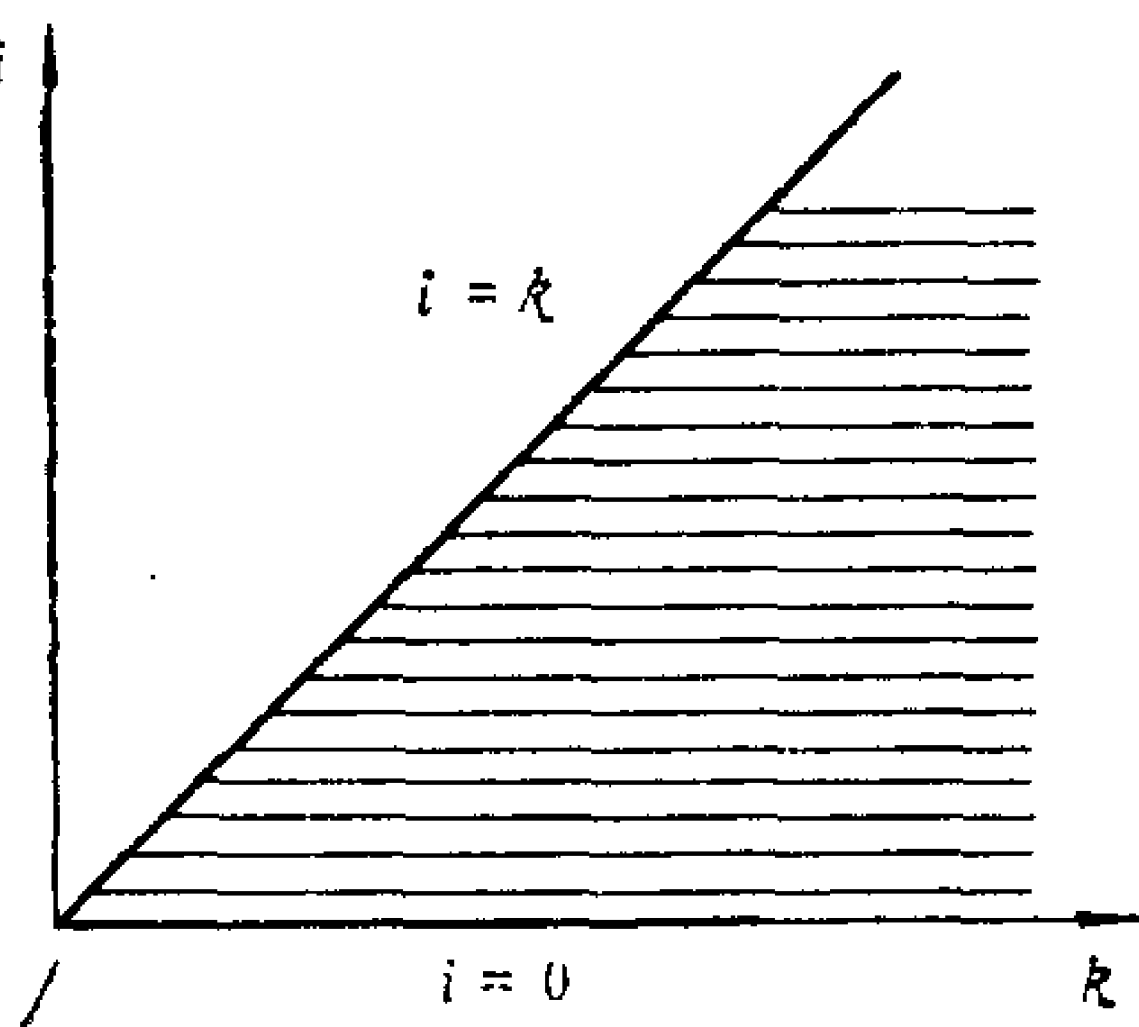
与拉氏变换类似, 我们有下列定理。

卷积定理

$$Z[(x * y)(kT)] = Z[x(kT)]Z[y(kT)] \quad (5.3)$$

即两数列的卷积的  $z$  变换等于两数列的各自  $z$  变换的乘积。

$$\begin{aligned} \text{证 } Z[(x * y)(kT)] &= Z\left[\sum_{i=0}^k x(iT)y(kT-iT)\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=0}^k x(iT)y(kT-iT) \right\} z^{-k} \quad (5.4) \end{aligned}$$



按交换求和次序公式（类似于交换积分次序公式）可见 (5.4) 中的双和可以交换次序成

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=i}^{\infty} x(iT)y(kT-iT)z^{-k} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} x(iT) \sum_{k=i}^{\infty} y(kT-iT)z^{-k} \quad (\text{以下令 } k-i=l) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} x(iT) \sum_{l=0}^{\infty} y(lT)z^{-i-l} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} x(iT)z^{-i} \sum_{l=0}^{\infty} y(lT)z^{-l} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)z^{-k} \\ &= Z[x(kT)]Z[y(kT)] \end{aligned}$$

证毕

#### (六) 初值定理

设  $Z[x(kT)] = X(z)$  如果  $X(\infty)$  存在为有穷,

则  $x(0) = X(\infty)$

证. 按定义,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = X(z) \quad (5.5)$$

并且在  $|z| > R_1$  时, 级数绝对收敛, 并且一致收敛。今(5.5)可写成

$$\begin{aligned} & \left| X(z) - x(0) - \frac{x(T)}{z} - \dots - \frac{x(NT)}{z^N} \right| \\ &= \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{x(kT)}{z^k} \right| \end{aligned}$$

由级数在  $|z| > R_1$  的一致收敛性, 对于任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N$ , 当  $|z| > R_1$  有

$$\left| \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{x(kT)}{z^k} \right| < \varepsilon$$

从而对于这个  $N$ , 当  $|z| > R_1$  有

$$\begin{aligned} & \left| X(z) - x(0) - \frac{x(T)}{z} - \frac{x(2T)}{z^2} - \dots \right. \\ & \quad \left. - \frac{x(NT)}{z^N} \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

令  $z = \infty$  取极限, 即得

$$|X(\infty) - x(0) - 0^*| < \varepsilon \quad (0^* \text{表无限小})$$

由  $\varepsilon$  的任意性, 即得

$$X(\infty) - x(0) = 0^*$$

舍去  $0^*$  即得证。

(七) 终值定理



设  $Z[x(kT)] = X(z)$

并且  $(1 - \frac{1}{z})X(z)$  在  $|z| \geq 1$  时是解析的, 则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(kT) = \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z| > 1}} (1 - \frac{1}{z})X(z)$$

证现有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n x(kT)z^{-k} = X(z) \quad (|z| > R) \quad (5.6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k} = X(z) \quad (|z| > R)$$

将此等式乘以  $z^{-1}$ , 可有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k-1} = \frac{1}{z} X(z) \quad (|z| > R)$$

换  $k$  为  $k-1$ , 可有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x(kT - T)z^{-k} = \frac{1}{z} X(z) \quad (|z| > R) \quad (5.7)$$

从(5.6)减去(5.7), 可有

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ x(0) + \sum_{k=1}^n [x(kT) - x(kT - T)]z^{-k} \right\} \\ & = (1 - \frac{1}{z})X(z) \end{aligned} \quad (5.8)$$

并且(5.8)的收敛域一般可为  $|z| > R'$ , 而  $R' \leq R$ 。

注意  $(1 - \frac{1}{z})X(z)$  在  $z = 1$  可能呈  $0 \cdot \infty$ 。如果

此函数在  $|z| \geq 1$  是解析的, 那末(5.8)左端级数在  $|z| \geq 1$  时是收敛的。按著名的阿贝耳 (Abel) 定理, 于 (5.8) 在

$|z| \geq 1$  令  $z \rightarrow 1$  取极限, 即得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ x(0) + \sum_{k=1}^n [x(kT) - x(kT - T)] \right\} \\ = \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z| \geq 1}} \left( 1 - \frac{1}{z} \right) X(z) \end{aligned}$$

即  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(nT) = \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z| \geq 1}} \left( 1 - \frac{1}{z} \right) X(z)$  证毕

## § 6 性质汇总, Z变换表

$$Z[x(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = X(z)$$

### 性 质 汇 总

(一) 可加性

$$Z[x(kT) + y(kT)] = Z[x(kT)] + Z[y(kT)]$$

(二) 齐次性

$$Z[ax(kT)] = aZ[x(kT)] \quad a \text{ 与 } k \text{ 无关}$$

(三) 时间的平移

$n$  为自然数, 则

$$Z[x(kT - nT)] = z^{-n}Z[x(kT)]$$

$$Z[x(kT + nT)] = z^n \left\{ Z[x(kT)] - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k} \right\}$$

其中第一式可更确切地写成

$$Z[x_1(kT)] = z^{-n}Z[x(kT)]$$

而 
$$x_1(kT) = \begin{cases} x(kT - nT), & \text{在 } k \geq n \\ 0, & \text{在 } k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

#### (四) 复扩张

若  $Z[x(kT)] = X(z)$ , 则

$Z[\mu^k x(kT)] = X(z/\mu)$ ,  $\mu \neq 0$  与  $k$  无关,  $\mu$  可为复数。

#### (五) 卷积

$$\begin{aligned}(x * y)(kT) &= \sum_{i=0}^k x(iT)y(kT-iT) \\ &= \sum_{i=0}^k y(iT)x(kT-iT)\end{aligned}$$

则  $Z[(x * y)(kT)] = Z[x(kT)]Z[y(kT)]$

#### (六) 初值定理

若  $X(\infty)$  存在为有穷数, 则

$$x(0) = X(\infty)$$

#### (七) 终值定理

若  $\left(1 - \frac{1}{z}\right)X(z)$  在  $|z| \geq 1$  是解析的, 则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(kT) = \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z| \geq 1}} \left(1 - \frac{1}{z}\right)X(z)$$

### Z 变 换 表

$$1^\circ \quad Z[1] = \frac{z}{z-1}$$

$$2^\circ \quad Z[\mu^k] = \frac{z}{z-\mu} \quad \mu \text{ 可为复数}$$

$$Z[e^{-a \cdot kT}] = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

$$3^{\circ} \quad Z[k T] = \frac{T z}{(z - 1)^2}$$

$$4^{\circ} \quad Z[\mu^k k T] = \frac{T \mu z}{(z - \mu)^2}$$

$$5^{\circ} \quad Z[(k T)^2] = \frac{T^2 z (z + 1)}{(z - 1)^3}$$

$$6^{\circ} \quad Z[\mu^k (k T)^2] = \frac{T^2 \mu z (z + \mu)}{(z - \mu)^3}$$

$$7^{\circ} \quad Z[(k T)^3] = \frac{T^3 z (z^2 + 4z + 1)}{(z - 1)^4}$$

$$8^{\circ} \quad Z[\mu^k (k T)^3] = \frac{T^3 \mu z (z^2 + 4\mu z + \mu^2)}{(z - \mu)^4}$$

$$9^{\circ} \quad Z[(k T)^n] = (-1)^n \left[ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \frac{z}{z - e^{-\lambda T}} \right]_{\lambda=0}$$

$$10^{\circ} \quad Z[\mu^k (k T)^n] = (-1)^n \left[ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \frac{z}{z - \mu e^{-\lambda T}} \right]_{\lambda=0}$$

$$11^{\circ} \quad Z[(-\mu)^k (k T)^n] = (-1)^n \left[ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \frac{z}{z + \mu e^{-\lambda T}} \right]_{\lambda=0}$$

$$12^{\circ} \quad Z[\cos(\omega k T)] = \frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$$

$$13^{\circ} \quad Z[\sin(\omega k T)] = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$$

$$14^{\circ} \quad Z[\mu^k \cos(\omega k T)] = \frac{z(z - \mu \cos \omega T)}{z^2 - 2z \mu \cos \omega T + \mu^2}$$



$$15^{\circ} \quad Z[\mu^k \sin(\omega_k T)] = \frac{z \mu \sin \omega T}{z^2 - 2z \mu \cos \omega T + \mu^2}$$

$$16^{\circ} \quad Z[\mu^k e^{-\alpha k T} \cos(\omega_k T)] \\ = \frac{z(z - \mu e^{-\alpha T} \cos \omega T)}{z^2 - 2z \mu e^{-\alpha T} \cos \omega T + \mu^2 e^{-2\alpha T}}$$

$$17^{\circ} \quad Z[\mu^k e^{-\alpha k T} \sin(\omega_k T)] \\ = \frac{z \mu e^{-\alpha T} \sin \omega T}{z^2 - 2z \mu e^{-\alpha T} \cos \omega T + \mu^2 e^{-2\alpha T}}$$

$$18^{\circ} \quad Z[\operatorname{ch}(\omega_k T)] = \frac{z(z - \operatorname{ch} \omega T)}{z^2 - 2z \operatorname{ch} \omega T + 1}$$

$$19^{\circ} \quad Z[\operatorname{sh}(\omega_k T)] = \frac{z \operatorname{sh} \omega T}{z^2 - 2z \operatorname{ch} \omega T + 1}$$

$$20^{\circ} \quad Z[\mu^k \operatorname{ch}(\omega_k T)] = \frac{z(z - \mu \operatorname{ch} \omega T)}{z^2 - 2z \mu \operatorname{ch} \omega T + \mu^2}$$

$$21^{\circ} \quad Z[\mu^k \operatorname{sh}(\omega_k T)] = \frac{z \mu \operatorname{sh} \omega T}{z^2 - 2z \mu \operatorname{ch} \omega T + \mu^2}$$

$$22^{\circ} \quad Z[k T \cos(\omega_k T)] \\ = T \frac{z(z^2 + 1) \cos \omega T - 2z^2}{(z^2 - 2z \cos \omega T + 1)^2}$$

$$23^{\circ} \quad Z[k T \sin(\omega_k T)] = T \frac{z(z^2 - 1) \sin \omega T}{(z^2 - 2z \cos \omega T + 1)^2}$$

$$24^{\circ} \quad Z[\mu^k k T \cos(\omega_k T)]$$

$$= T \frac{\mu z(z^2 + \mu^2) \cos \omega T - 2\mu^2 z^2}{(z^2 - 2z\mu \cos \omega T + \mu^2)^2}$$

$$25^\circ \quad Z[\mu^k k T \sin(\omega k T)] = T \frac{\mu z(z^2 - \mu^2) \sin \omega T}{(z^2 - 2z\mu \cos \omega T + \mu^2)^2}$$

$$26^\circ \quad Z[\mu^k k T e^{-\alpha k T} \cos(\omega k T)] \\ = T \frac{\mu e^{-\alpha T} z(z^2 + \mu^2 e^{-2\alpha T}) - 2\mu^2 e^{-2\alpha T} z^2}{(z^2 - 2z\mu e^{-\alpha T} \cos \omega T + \mu^2 e^{-2\alpha T})^2}$$

$$27^\circ \quad Z[\mu^k k T e^{-\alpha k T} \sin(\omega k T)] \\ = T \frac{\mu e^{-\alpha T} z(z^2 - \mu^2 e^{-2\alpha T}) \sin \omega T}{(z^2 - 2z\mu e^{-\alpha T} \cos \omega T + \mu^2 e^{-2\alpha T})^2}$$

$$28^\circ \quad Z[k T \operatorname{ch}(\omega k T)] = T \frac{z(z^2 + 1) \operatorname{ch} \omega T - 2z^2}{(z^2 - 2z \operatorname{ch} \omega T + 1)^2}$$

$$29^\circ \quad Z[k T \operatorname{sh}(\omega k T)] = T \frac{z(z^2 - 1) \operatorname{sh} \omega T}{(z^2 - 2z \operatorname{ch} \omega T + 1)^2}$$

$$30^\circ \quad Z[\mu^k k T \operatorname{ch}(\omega k T)] \\ = T \frac{\mu z(z^2 + \mu^2) \operatorname{ch} \omega T - 2\mu^2 z^2}{(z^2 - 2\mu z \operatorname{ch} \omega T + \mu^2)^2}$$

$$31^\circ \quad Z[\mu^k k T \operatorname{sh}(\omega k T)] = T \frac{\mu z(z^2 - \mu^2) \operatorname{sh} \omega T}{(z^2 - 2\mu z \operatorname{ch} \omega T + \mu^2)^2}$$

$$32^\circ \quad Z[(k T)^2 \cos(\omega k T)] \\ = T^2 \frac{z(z^4 - 1) \cos \omega T - 2z^2(z^2 - 1)(1 + \sin^2 \omega T)}{(z^2 - 2z \cos \omega T + 1)^3}$$

$$33^\circ \quad Z[(k T)^2 \sin(\omega k T)]$$

$$= T^2 \frac{z(z^4 - 6z^2 + 1)\sin\omega T + 2z^2(z^2 + 1)\sin\omega T \cos\omega T}{(z^2 - 2z\cos\omega T + 1)^3}$$

$$34^\circ \quad Z[\mu^k(kT)^2 \cos(\omega kT)]$$

$$= T^2 \frac{\mu z(z^4 - \mu^4)\cos\omega T - 2\mu^2 z^2(z^2 - \mu^2)(1 + \sin^2\omega T)}{(z^2 - 2\mu z\cos\omega T + \mu^2)^3}$$

$$35^\circ \quad Z[\mu^k(kT)^2 \sin(\omega kT)]$$

$$= \frac{T^2}{(z^2 - 2\mu z\cos\omega T + \mu^2)^2} [\mu z(z^4 - 6\mu^2 z^2 + \mu^4)\sin\omega T + 2\mu^2 z^2(z^2 + \mu^2)\sin\omega T \cos\omega T]$$

表中 $1^\circ \sim 15^\circ$ 不带因子 $\mu^k$ 的各公式已在以前各节中得出。带 $\mu^k$ 因子的各式可由相应不带此因子的各式利用性质（四）得出，而 $16^\circ$ 及 $17^\circ$ 则可在 $14^\circ$ 及 $15^\circ$ 中换 $\mu$ 为 $\mu e^{-\sigma T}$ 得出

$$\text{由 } 2^\circ, \text{ 可有 } Z[e^{\sigma kT}] = \frac{z}{z - e^{\sigma T}}$$

及

$$Z[e^{-\sigma kT}] = \frac{z}{z - e^{-\sigma T}}$$

两式和差之半分别给出 $18^\circ$ ， $19^\circ$ 。应用性质（四）在 $18^\circ$ 及 $19^\circ$ 即分别得 $20^\circ$ 及 $21^\circ$ 。

在 $4^\circ$ 中取 $\mu = e^{j\omega T}$ ，得

$$\begin{aligned} z[kTe^{j\omega kT}] &= \frac{Tze^{j\omega T}}{(z - e^{j\omega T})^2} \\ &= \frac{Tze^{j\omega T}(z - e^{-j\omega T})^2}{(z - e^{j\omega T})^2(z - e^{-j\omega T})^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{Tz(z^2 e^{j\omega T} - 2z + e^{-j\omega T})}{(z^2 - 2z \cos \omega T + 1)^2}$$

$$= \frac{Tz[(z^2 + 1)\cos \omega T - 2z + j(z^2 - 1)\sin \omega T]}{(z^2 - 2z \cos \omega T + 1)^2}$$

分开不含  $j$  的项及含  $j$  的项，即得22°及23°。应用性质（四），从22°及23°即得24°及25°。在24°及25°中换  $\mu$  为  $\mu e^{-\omega T}$  即得26°及27°。

欲证28°及29°，可在4°中分别取  $\mu$  为  $e^{\omega T}$  及  $e^{-\omega T}$ ，给出

$$Z[kTe^{\omega kT}] = \frac{Tze^{\omega T}}{(z - e^{\omega T})^2}$$

$$Z[kTe^{-\omega kT}] = \frac{Tze^{-\omega T}}{(z - e^{-\omega T})^2}$$

两式和差之半分别给出

$$Z[kT\text{ch}(\omega kT)]$$

$$= \frac{1}{2} Tz \left\{ \frac{e^{\omega T}}{(z - e^{\omega T})^2} + \frac{e^{-\omega T}}{(z - e^{-\omega T})^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} Tz \frac{e^{\omega T}(z - e^{-\omega T})^2 + e^{-\omega T}(z - e^{\omega T})^2}{(z^2 - 2z \text{ch} \omega T + 1)^2}$$

$$= Tz \frac{(z^2 + 1)\text{ch} \omega T - 2z}{(z^2 - 2z \text{ch} \omega T + 1)^2}$$

$$Z[kT\text{sh}(\omega kT)]$$

$$= \frac{1}{2} Tz \frac{e^{\omega T}(z - e^{-\omega T})^2 - e^{-\omega T}(z - e^{\omega T})^2}{(z^2 - 2z \text{ch} \omega T + 1)^2}$$



$$= T z \frac{(z^2 - 1) \operatorname{sh} \omega T}{(z^2 - 2z \operatorname{ch} \omega T + 1)^2}$$

它们分别是 $28^\circ$ 及 $29^\circ$ 。应用性质(四)，从 $28^\circ$ 及 $29^\circ$ 即得 $30^\circ$ 及 $31^\circ$ 。

欲证 $32^\circ$ 及 $33^\circ$ ，可在 $6^\circ$ 中取 $\mu = e^{j\omega T}$ ，给出

$$\begin{aligned} Z[(kT)^2 e^{j\omega kT}] &= T^2 z \frac{e^{j\omega T}(z + e^{j\omega T})}{(z - e^{j\omega T})^3} \\ &= T^2 z \frac{(z + e^{j\omega T})e^{j\omega T}(z - e^{-j\omega T})^3}{(z - e^{j\omega T})^3(z - e^{-j\omega T})^3} \\ &= T^2 z \frac{(z + e^{j\omega T})(z - e^{-j\omega T})e^{j\omega T}(z - e^{-j\omega T})^2}{(z^2 - 2z \cos \omega T + 1)^3} \\ &= T^2 z \frac{(z^2 - 1 + 2jz \sin \omega T)(z^2 e^{j\omega T} - 2z + e^{-j\omega T})}{(z^2 - 2z \cos \omega T + 1)^3} \\ &= T^2 z \frac{[(z^2 - 1) + 2jz \sin \omega T]}{(z^2 - 2z \cos \omega T + 1)^2} \\ &\quad \times \frac{[(z^2 - 1) \cos \omega T - 2z + j(z^2 - 1) \sin \omega T]}{(z^2 - 2z \cos \omega T + 1)} \end{aligned}$$

分开实部及虚部即得 $32^\circ$ 及 $33^\circ$ 。应用性质(四)，从 $32^\circ$ 及 $33^\circ$ 即得 $34^\circ$ 及 $35^\circ$ 。

## § 7 反 Z 变换

在§ 3 中，我们定义了 $x(kT)$ 的 $z$ 变换

$$Z[x(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} = X(z) \quad (7.1)$$

末端 $X(z)$ 是中间 $z$ 的负幂级数之和,首端是 $z$ 变换的记号。在§3中,我们曾假定此负幂级数在某圆外 $|z| > R$ 收敛。现在我们来阐明作这种假定的理由。

我们用著名的柯西(Cauchy)根号法来判别(7.1)中级数的收敛或发散。设 $x(kT)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ )为给定的数列。考察(7.1)中级数第 $n$ 项(不计第一项)的绝对值的 $n$ 次方根

$$\sqrt[n]{|x(nT)z^{-n}|} = \sqrt[n]{|x(nT)|} / |z|$$

它的上极限(即最大极限)为

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x(nT)|} / |z|$$

可写

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x(nT)|}$$

我们知道:对于任何 $x(kT)$ ,  $R$ 必存在:  $0 \leq R \leq \infty$ , 于是  $\rho = R / |z|$ 。柯西根号法告诉我们:

设  $R < \infty$  ( $R \neq \infty$ )。

如果  $\rho < 1$ , 即  $|z| > R$ , 则(7.1)绝对收敛;

如果  $\rho > 1$ , 即  $|z| < R$ , 则(7.1)发散;

如果  $\rho = 1$ , 即  $|z| = R$ , 则级数(7.1)的收敛性不能定。

我们还知道:  $|z| = R$ 为中心在原点、半径为 $R$ 的圆周,  $|z| > R$ 为圆外所成之域,  $|z| < R$ 为圆内所成之域。按上面的结果, 我们称圆外 $|z| > R$ 为(7.1)的收敛域。这就是我们在§3中定义 $z$ 变换时, 假定级数 $\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}$ 在 $|z| > R$ 内收敛的理由。 $X(z)$ 为这级数的和, 它确定在域 $|z| > R$ 。按幂级数理论, (7.1)中右端等式可以逐项求导而不改变其收敛域。因此, 和函数 $X(z)$ 在 $|z| > R$ 域是解析的。

现在研究相反的问题。设  $X(z)$  是一个给定的复变函数，它在某圆外  $|z| > R$  是解析的，并且存在有穷数  $X(\infty)$ ，我们讨论  $X(z)$  是否能展成如下的负幂级数

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} \quad (7.2)$$

其中  $x(kT)$  是待定系数。假定 (7.2) 成立，那末如在 § 5 (六) 中，我们有  $x(0) = X(\infty)$ 。至于其他的  $x(kT)$  ( $k = 1, 2, \dots$ )，我们可用下法求得。取  $n \geq 1$  为某一固定的自然数，并取  $R_1 > R$ ，以  $\Gamma$  表圆周  $|z| = R_1$ ，以  $z^{n-1}$  遍乘 (7.2)，可有

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{n-1-k} = z^{n-1} X(z) \quad (7.3)$$

题设  $X(z)$  在  $|z| > R$  是解析的，而  $R_1 > R$ ，故  $X(z)$  在  $|z| \geq R_1$  是解析的，因而  $z^{n-1} X(z)$  在  $|z| \geq R_1$  是解析的。现在就 (7.3) 沿圆周  $\Gamma: |z| = R_1$  的正向 (顺时针) 逐项取围道积分，可有

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \oint_{\Gamma} z^{n-1-k} dz = \oint_{\Gamma} z^{n-1} X(z) dz \quad (7.4)$$

根据被积函数  $z^{n-1} X(z)$  在  $\Gamma$  上的解析性，(7.4) 右端积分为有穷数。至于左端逐项积分的合理性，我们暂时不考虑它。对左端所有  $k \neq n$  的项

$$\oint_{\Gamma} z^{n-1-k} dz = \oint_{\Gamma} d\left(\frac{z^{n-k}}{n-k}\right) = \Delta_r\left(\frac{z^{n-k}}{n-k}\right) = 0$$

其中  $\Delta_r\left(\frac{z^{n-k}}{n-k}\right)$  表示  $\frac{z^{n-k}}{n-k}$  沿  $\Gamma$  正向一周的增量。而当

$k = n$  时，左端所留下的积分为  $\oint_{\Gamma} z^{-1} dz$ 。对此积分，我们可用变换  $z = R_1 e^{i\theta}$ ， $dz = R_1 i e^{i\theta} d\theta$ ，又  $\Gamma$  沿正向一周相当于  $\theta$  由  $2\pi$  到 0，于是

$$\oint_r \frac{dz}{z} = - \int_0^{2\pi} \frac{R_1 j e^{j\theta} d\theta}{R_1 e^{j\theta}} = - \int_0^{2\pi} j d\theta = -2\pi j$$

则(7.4)成为

$$-x(nT)2\pi j = \oint_r z^{n-1} X(z) dz$$

从而在  $n \geq 1$  时

$$x(nT) = \frac{-1}{2\pi j} \oint_r z^{n-1} X(z) dz$$

其中积分是沿圆周  $\Gamma: |z| = R_1$  的正向取的, 而  $R_1$  是大于  $R$  的任何数。

总之, 如果  $X(z)$  为已知,  $X(z)$  在  $|z| > R$  是解析的, 且  $X(\infty)$  存在为有穷, 并且假定(7.2)成立, 则

$$x(kT) = \begin{cases} \frac{-1}{2\pi j} \oint_r z^{k-1} X(z) dz, & \text{在 } k \geq 1 \\ X(\infty), & \text{在 } k = 0 \end{cases} \quad (7.5)$$

其中  $\Gamma$  表示圆周  $|z| = R_1 (> R)$  的正向一周。

由于我们是假定(7.2)成立, 并且没有考虑逐项积分的合理性, 所以上述方法是不严密的。但如果我们能证(7.5)中的  $x(kT)$  确能满足(7.2), 即能证(7.5)中  $x(kT)$  的  $z$  变换确为已知的函数  $X(z)$ , 那末这问题才算圆满解决。现在来讨论(7.5)中的  $x(kT)$  是否满足(7.2)。为此, 我们

在(7.5)中作代换  $z = \frac{1}{\zeta}$ , 则

$$X(z) = X\left(\frac{1}{\zeta}\right) \equiv X_1(\zeta), X_1(\zeta) \text{ 在 } |\zeta| < \frac{1}{R}$$

$$\text{解析 } x(0) = X(\infty) = X_1(0)$$



圆周 $\Gamma$ 变成 $(-\Gamma_1)$ , 而 $\Gamma_1$ 表示圆周 $|\zeta| = \frac{1}{R_1} \left( < \frac{1}{R} \right)$ 的正向一周,  $(-\Gamma_1)$ 表示此圆周负向一周, 并且 $X_1(\zeta)$ 在 $|\zeta| \leq \frac{1}{R_1}$ 解析;

另外在 $k = 1, 2, 3, \dots$ 时,

$$\begin{aligned} x(kT) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{(-\Gamma_1)} \zeta^{-k+1} X_1(\zeta) \left( -\frac{1}{\zeta^2} d\zeta \right) \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} \zeta^{-k-1} X_1(\zeta) d\zeta \end{aligned}$$

把这些代入(7.2)的右端, 可有

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} &= x(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi j} \\ &\quad \times \left( \oint_{\Gamma_1} \zeta^{-k-1} X_1(\zeta) d\zeta \right) z^{-k} \\ &= X_1(0) + \frac{1}{2\pi j} \sum_{k=1}^{\infty} \oint_{\Gamma_1} \frac{1}{\zeta} \left( \frac{1}{z\zeta} \right)^k X_1(\zeta) d\zeta \end{aligned}$$

取 $1/z$ 为 $\Gamma_1$ 内任一点,  $\zeta$ 为 $\Gamma_1$ 上一点, 则

$$\left| \frac{1}{z} \right| < |\zeta| = \frac{1}{R_1}$$

从而

$$\left| \frac{1}{z\zeta} \right| < 1$$

故级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z\zeta} \right)^k$ 绝对收敛, 并且对 $\Gamma_1$ 上的 $\zeta$ 说, 是一致

收敛；又  $\frac{1}{\zeta} X_1(\zeta)$  在  $\Gamma_1$  上是解析的，因而其模是有界的，故可交换  $\Sigma$  及  $\oint$  的次序，从而上式化成

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} \\
 &= X_1(0) + \frac{1}{2\pi j} \oint_{r_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta} \left( \frac{1}{z\zeta} \right)^k X_1(\zeta) d\zeta \\
 &= X_1(0) + \frac{1}{2\pi j} \oint_{r_1} \frac{1}{\zeta} \frac{1/(z\zeta)}{1 - [1/(z\zeta)]} X_1(\zeta) d\zeta \\
 &= X_1(0) + \frac{1}{2\pi j} \oint_{r_1} \frac{1}{\zeta} \frac{1/z}{\zeta - (1/z)} X_1(\zeta) d\zeta \\
 &= X_1(0) + \frac{1}{2\pi j} \oint_{r_1} \left( -\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta - (1/z)} \right) X_1(\zeta) d\zeta \\
 &= X_1(0) - \frac{1}{2\pi j} \oint_{r_1} \frac{X_1(\zeta)}{\zeta - 0} d\zeta \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi j} \oint_{r_1} \frac{X_1(\zeta)}{\zeta - (1/z)} d\zeta \\
 &= X_1(0) - X_1(0) + X_1(1/z) = X(z) \quad (\text{Cauchy}
 \end{aligned}$$

积分)这就证明了(7.5)中的  $x(kT)$  的确满足(7.2)。即我们证明了下面的命题

$$\text{如果 } \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} = X(z) \tag{7.2}$$

则

$$x(kT) = \begin{cases} \frac{-1}{2\pi j} \oint_r z^{k-1} X(z) dz, & \text{在 } k \geq 1 \\ X(\infty), & \text{在 } k = 0 \end{cases} \tag{7.5}$$

反之也成立。两者构成  $z$  变换对，并且可分别记如

$$Z[x(kT)] = X(z)$$

$$x(kT) = Z^{-1}[X(z)]$$

对于前一式，我们说  $x(kT)$  的  $z$  变换为  $X(z)$ ，对于后一式，我们说  $X(z)$  的反  $z$  变换为  $x(kT)$ 。

$$\text{例如 } Z[1] = \frac{z}{z-1} \quad 1 = Z^{-1}\left[\frac{z}{z-1}\right]$$

$$Z[\mu^k] = \frac{z}{z-\mu} \quad \mu^k = Z^{-1}\left[\frac{z}{z-\mu}\right]$$

等。

如果  $X(z)$  为已知，则可用留数法求(7.5)中的围道积分。题设  $z^{k-1}X(z)$  ( $k \geq 1$ ) 在  $\Gamma$  上及  $\Gamma$  外解析，即在  $|z| \geq R_1$  时解析。我们可先求出  $z^{k-1}X(z)$  在  $\Gamma$  内的不同的极点  $z_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ )。由于  $R_1$  是大于  $R$  的数，所以这些  $z_i$  就是  $z^{k-1}X(z)$  的所有极点，并且假定不再有  $z^{k-1}X(z)$  的其他异点。以  $\text{res}_{z_i}[z^{k-1}X(z)]$  表  $z^{k-1}X(z)$  在  $z_i$  的留数，则按留数定理，有

$$\oint_{\Gamma} z^{k-1} X(z) dz = -2\pi j \sum_i \text{res}_{z_i}[z^{k-1} X(z)] \quad (k \geq 1)$$

代入(7.5)，可得

$$x(kT) = \begin{cases} \sum_i \text{res}_{z_i}[z^{k-1} X(z)], & k \geq 1 \\ X(\infty), & k = 0 \end{cases} \quad (7.6)$$

## § 8 反Z变换的求法

给了某函数  $X(z)$ , 它在  $|z| > R$  解析, 并且存在  $X(\infty)$  为有穷。一般有三种方法求  $X(z)$  的反  $z$  变换  $Z^{-1}[X(z)]$ :

(i) 查表法, (ii) 负幂级数法, (iii) 留数法。对前两法有时须配合部分分式展开。现在举一些例子阐明如何运用这些方法。

例1.  $X(z) = \frac{z(1 - e^{-aT})}{(z-1)(z - e^{-aT})}$ , 求反  $z$  变换。

解  $X(\infty) = 0$ , 故  $x(0) = 0$ 。

(i) 查表法。我们把  $X(z)/z$  展成部分分式之和:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1 - e^{-aT}}{(z-1)(z - e^{-aT})} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z - e^{-aT}}$$

$$\text{从而 } X(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-aT}} \quad (8.1)$$

我们所以把  $X(z)/z$  展开成部分分式之和是由于表中多数  $z$  变换的分子含有因子  $z$  这一事实所启发。

查表1°及2°立刻得

$$Z^{-1}[X(z)] = 1 - e^{-akT} = x(kT)$$

注意这结果对  $k = 0$  也成立:  $x(0) = 0$ 。

(ii) 负幂级数法。由(8.1), 可有

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} e^{-a k T} z^{-k} \quad [|z| > \max(1, e^{-a T})]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (1 - e^{-a k T}) z^{-k}$$

故  $x(kT) = 1 - e^{-a k T} \quad k = 0, 1, 2 \dots$

(iii) 留数法。用§7的(7.6)这里

$$z^{k-1} X(z) = \frac{z^k (1 - e^{-a T})}{(z-1)(z - e^{-a T})}$$

它有两个一阶极点:  $1, e^{-a T}$

$$x(kT) = \underset{1}{\operatorname{res}}[z^{k-1} X(z)] + \underset{e^{-a T}}{\operatorname{res}}[z^{k-1} X(z)]$$

$$= \left[ (z-1) \frac{z^k (1 - e^{-a T})}{(z-1)(z - e^{-a T})} \right]_{z=1}$$

$$+ \left[ (z - e^{-a T}) \frac{z^k (1 - e^{-a T})}{(z-1)(z - e^{-a T})} \right]_{z=e^{-a T}}$$

$$= \frac{z^k (1 - e^{-a T})}{z - e^{-a T}} \Big|_{z=1} + \frac{z^k (1 - e^{-a T})}{z - 1} \Big|_{z=e^{-a T}}$$

$$= 1 - e^{-a k T} \quad (k = 0, 1, 2 \dots)$$

例2.  $X(z) = \frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$ , 求  $x(kT)$ 。

解 这是§6表中的5°。由该公式, 可见  $x(kT) = (kT)^2$ 。我们用负幂级数法及留数法验证这结果。

负幂级数法。  $X(z)$  分子及分母除以  $z^3$  可见, 在  $|z| > 1$  时, 有



$$\begin{aligned}
X(z) &= T^2 \left( \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{z} \right)^{-3} \\
&= T^2 \left( \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \right) \left( 1 + 3 \left( \frac{1}{z} \right) + \dots \right. \\
&\quad \left. + \frac{(k+1)(k+2)}{2} \frac{1}{z^k} + \dots \right)
\end{aligned}$$

将上式乘开后可见，其  $1/z^k$  的系数为

$$\begin{aligned}
x(kT) &= T^2 \left[ \frac{1}{2} k(k+1) + \frac{1}{2} (k-1)k \right] = (kT)^2 \\
&\quad (k = 0, 1, 2, \dots)
\end{aligned}$$

留数法。  $z^{k-1} X(z) = T^2 \frac{z^k(z+1)}{(z-1)^3}$

$z = 1$  为仅有的一个 3 阶极点。

$$\begin{aligned}
x(kT) &= \operatorname{res}_1 [z^{k-1} X(z)] = \operatorname{res}_1 \left[ T^2 \frac{z^k(z+1)}{(z-1)^3} \right] \\
&= \frac{T^2}{2!} \left[ \frac{d^2}{dz^2} \left\{ (z-1)^3 \frac{z^k(z+1)}{(z-1)^3} \right\} \right]_{z=1} \\
&= \frac{T^2}{2} \left[ \frac{d^2}{dz^2} (z^{k+1} + z^k) \right]_{z=1} \\
&= \frac{1}{2} T^2 [(k+1)k z^{k-1} + k(k-1) z^{k-2}]_{z=1} \\
&= \frac{1}{2} T^2 [(k+1)k + k(k-1)] \\
&= (kT)^2
\end{aligned}$$

注意这结果对  $k = 0$  也成立:  $x(0) = X(\infty) = 0$

例3.  $X(z) = \frac{az}{z-a}$ , 求  $x(kT)$ 。

解 负幂级数法。在  $|z| > |a|$  时,

$$X(z) = \frac{a}{1 - (a/z)} = a \left( 1 + \frac{a}{z} + \dots + \frac{a^k}{z^k} + \dots \right)$$

$$x(kT) = (1/z^k) \text{ 的系数} = a a^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \textcircled{1}$$

$$\text{留数法。 } Z^{-1} \left[ \frac{az}{z-a} \right] = \text{res} \left[ z^{k-1} X(z) \right]$$

$$= \text{res} \left[ \frac{a z^k}{z-a} \right]$$

$$= (z-a) \frac{a z^k}{z-a} \Big|_{z=a} = a a^k = x(kT)$$

这结果对  $k = 0$  也成立。  $x(0) = a = X(\infty)$ 。

例4.  $X(z) = \frac{az^2 + bz}{(z-a)^2}$ , 求  $x(kT)$ 。

解  $x(0) = X(\infty) = a$

负幂级数法。在  $|z| > |a|$  时,

$$X(z) = \left( a + \frac{b}{z} \right) \left( 1 - \frac{a}{z} \right)^{-2}$$

---

①这结果在  $a = 0$  成立, 只须注意: 在  $a = 0$  时

$$a^k = \begin{cases} 1, & \text{在 } k = 0 \\ 0, & \text{在 } k = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

$$= \left( a + \frac{b}{z} \right) \left( 1 + \frac{2a}{z} + \dots + (k+1) \frac{a^k}{z^k} + \dots \right)$$

故  $x(kT) =$  乘积中  $1/z^k$  的系数  $= a(k+1)a^k + bk a^{k-1}$  ②

这结果在  $k=0$  也成立:  $x(0) = a$ 。

留数法。

$$x(kT) = \underset{a}{\operatorname{res}} [z^{k-1} X(z)]$$

$$= \underset{a}{\operatorname{res}} \frac{a z^{k+1} + b z^k}{(z-a)^2}$$

$$= \left[ \frac{d}{dz} \left\{ (z-a)^2 \frac{a z^{k+1} + b z^k}{(z-a)^2} \right\} \right]_{z=a}$$

$$= \left[ \frac{d}{dz} (a z^{k+1} + b z^k) \right]_{z=a}$$

$$= [a(k+1)z^k + bk z^{k-1}]_{z=a}$$

$$= a(k+1)a^k + bk a^{k-1}$$

例5.  $X(z) = \frac{a z^2 + b z}{(z-a)(z-\beta)}$ ,  $a \neq \beta$ , 求  $x(kT)$ 。

显然: 无论用负幂级数法或留数法, 可有

$$x(kT) = Z^{-1} \left[ \frac{a z^2 + b z}{(z-a)(z-\beta)} \right]$$

$$= \frac{a(a^{k+1} - \beta^{k+1}) + b(a^k - \beta^k)}{a - \beta}$$

$$(k = 0, 1, 2, 3 \dots)$$

---

②  $a=0$  时,  $a^k = \begin{cases} 1, & \text{在 } k=0 \\ 0, & \text{在 } k=1, 2, \dots \end{cases}$  此结果对  $a=0$  也成立。

注意在  $k=0$ , 此式给出  $x(0) = a = X(\infty)$

又如果于此结果中令  $\beta = a$ , 取实在值, 可得

$$Z^{-1} \left[ \frac{az^2 + bz}{(z-a)^2} \right] = a(k+1)a^k + bka^k, \text{ 同例 4。}$$

$$\text{例 6. } X(z) = \frac{az^2 + bz}{(z-a)^2 + \beta^2} \quad (\beta > 0),$$

求  $x(kT)$ 。

解 设  $a = \rho \cos \varphi$ ,  $\beta = \rho \sin \varphi$ , 则

$$\rho = \sqrt{a^2 + \beta^2} \quad \cos \varphi = a/\rho \quad \sin \varphi = \beta/\rho$$

分母的两个零点为  $\rho(\cos \varphi \pm j \sin \varphi) = \rho e^{\pm j \varphi}$ 。利用例 5 的结果, 可有

$$\begin{aligned} x(kT) &= \frac{1}{2j\rho \sin \varphi} \left\{ a\rho^{k+1} [e^{j(k+1)\varphi} - e^{-j(k+1)\varphi}] \right. \\ &\quad \left. + b\rho^k [e^{jk\varphi} - e^{-jk\varphi}] \right\} \\ &= a\rho^k \frac{\sin(k+1)\varphi}{\sin \varphi} + b\rho^{k-1} \frac{\sin k\varphi}{\sin \varphi} \\ &\quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{即 } Z^{-1} \left[ \frac{az^2 + bz}{(z-a)^2 + \beta^2} \right] &= Z^{-1} \left[ \frac{az^2 + bz}{z^2 - 2\rho z \cos \varphi + \rho^2} \right] \\ &= a\rho^k \frac{\sin(k+1)\varphi}{\sin \varphi} + b\rho^{k-1} \frac{\sin k\varphi}{\sin \varphi} \\ &\quad (k = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

注意  $\varphi = 0$  取实在值亦得例 4 的结果。

例7.  $X(z) = \frac{az^3 + bz^2 + cz}{(z-a)^3}$ , 求  $x(kT)$ 。

解  $x(0) = X(\infty) = a$

$$x(kT) = \underset{a}{res} [z^{k-1} X(z)]$$

$$= \underset{a}{res} \left[ \frac{az^{k+2} + bz^{k+1} + cz^k}{(z-a)^3} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{d^2}{dz^2} (az^{k+2} + bz^{k+1} + cz^k) \right]_{z=a}$$

$$= \frac{1}{2} a(k+2)(k+1)a^k + \frac{1}{2} b(k+1)ka^{k-1}$$

$$+ \frac{1}{2} ck(k-1)a^{k-2}$$

这结果对  $k=0$  也成立:

$$x(0) = \frac{1}{2} a \cdot 2 \cdot 1 a^0 = a = X(\infty)$$

特别,  $a=0, b=\mu, c=\mu^2, a=\mu$ , 给出表中的6°。

例8.  $X(z) = \frac{az^3 + bz^2 + cz}{(z-a)^2(z-\beta)}, \quad a \neq \beta,$

求  $x(kT)$

解  $x(kT) = \underset{a}{res} [z^{k-1} X(z)] + \underset{\beta}{res} [z^{k-1} X(z)]$

$$= \underset{a}{res} \left[ \frac{az^{k+2} + bz^{k+1} + cz^k}{(z-a)^2(z-\beta)} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \operatorname{res}_\beta \left[ \frac{az^{k+2} + bz^{k+1} + cz^k}{(z-a)^2(z-\beta)} \right] \\
& = \left[ \frac{d}{dz} \frac{az^{k+2} + bz^{k+1} + cz^k}{z-\beta} \right]_{z=a} \\
& \quad + \left. \frac{az^{k+2} + bz^{k+1} + cz^k}{(z-a)^2} \right|_{z=\beta} \\
& = \frac{a(k+2)a^{k+1} + b(k+1)a^k + cka^{k-1}}{(a-\beta)^2} \\
& \quad - \frac{a(a^{k+2} - \beta^{k+2}) + b(a^{k+1} - \beta^{k+1}) + c(a^k - \beta^k)}{(a-\beta)^2}
\end{aligned}$$

这结果对  $k=0$  也成立:

$$\begin{aligned}
x(0) &= \frac{2aa+b}{a-\beta} - \frac{a(a^2 - \beta^2) + b(a-\beta)}{(a-\beta)^2} \\
&= \frac{2aa+b}{a-\beta} - \frac{a(a+\beta) + b}{a-\beta} = a \quad \text{而 } X(\infty) = a
\end{aligned}$$

例9.  $X(z) = \frac{az^3 + bz^2 + cz}{(z-a)(z-\beta)(z-\gamma)} \quad a \neq \beta \neq \gamma \neq a,$

求  $x(kT)$ 。

用留数法, 易求得

$$\begin{aligned}
x(kT) &= \frac{aa^{k+2} + ba^{k+1} + ca^k}{(a-\beta)(a-\gamma)} \\
& \quad + \frac{a\beta^{k+2} + b\beta^{k+1} + c\beta^k}{(\beta-a)(\beta-\gamma)} + \frac{a\gamma^{k+2} + b\gamma^{k+1} + c\gamma^k}{(\gamma-a)(\gamma-\beta)}
\end{aligned}$$

这结果对  $k=0$  也成立。  $k=0$ , 可有



$$\begin{aligned}
x(0) &= \frac{a\alpha^2 + b\alpha + c}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{a\beta^2 + b\beta + c}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} \\
&\quad + \frac{a\gamma^2 + b\gamma + c}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)} \\
&= \frac{(a\alpha^2 + b\alpha + c)(\beta - \gamma) + (a\beta^2 + b\beta + c)(\gamma - \alpha) + (a\gamma^2 + b\gamma + c)(\alpha - \beta)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)} \\
&\quad \times \frac{(\gamma - \alpha) + (\alpha - \beta) + (\beta - \gamma)}{(\beta - \gamma)}
\end{aligned}$$

显然在  $\alpha = \beta$ ,  $\alpha = \gamma$ ,  $\beta = \gamma$  时, 分子均为 0, 故分子可化成  $a(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)$ , 从而  $x(0) = a = X(\infty)$ 。

例10.  $X(z) = \frac{az^3 + bz^2 + cz}{[(z - \alpha)^2 + \beta^2](z - \gamma)},$

求  $x(kT)$ 。

解 设  $\alpha = \rho \cos \varphi$ ,  $\beta = \rho \sin \varphi$ , 则  $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ ,  
 $\cos \varphi = \alpha / \rho$ ,  $\sin \varphi = \beta / \rho$ ,

分母的三个零点为  $\alpha \pm j\beta = \rho e^{\pm j\varphi}$  及  $\gamma$ 。

$$\begin{aligned}
x(kT) &= 2R \left\{ \text{res}_{\rho e^{j\varphi}} \left[ \frac{az^{k+2} + bz^{k+1} + cz^k}{[(z - \alpha)^2 + \beta^2](z - \gamma)} \right] \right\} \quad \textcircled{1} \\
&\quad + \text{res}_{\gamma} \left[ \frac{az^{k+2} + bz^{k+1} + cz^k}{[(z - \alpha)^2 + \beta^2](z - \gamma)} \right] \\
&= 2R \left\{ \left[ \frac{az^{k+2} + bz^{k+1} + cz^k}{(z - \rho e^{-j\varphi})(z - \gamma)} \right]_{z = \rho e^{j\varphi}} \right\} \\
&\quad + \frac{a\gamma^{k+2} + b\gamma^{k+1} + c\gamma^k}{(\gamma - \alpha)^2 + \beta^2}
\end{aligned}$$

① R 表实部

$$\begin{aligned}
&= 2R \left\{ \frac{\rho^k [a\rho^2 e^{j(k+2)\varphi} + b\rho e^{j(k+1)\varphi} + ce^{jk\varphi}]}{\rho(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi})(\rho e^{j\varphi} - \gamma)} \right\} \\
&\quad + \frac{a\gamma^{k+2} + b\gamma^{k+1} + c\gamma^k}{(\gamma - \alpha)^2 + \beta^2} \\
&= R \left\{ \frac{\rho^k [a\rho^2 e^{j(k+2)\varphi} + b\rho e^{j(k+1)\varphi} + ce^{jk\varphi}]}{\rho j \sin\varphi (\rho e^{j\varphi} - \gamma)} \right. \\
&\quad \times \left. \frac{(\rho e^{-j\varphi} - \gamma)}{(\rho e^{-j\varphi} - \gamma)} \right\} + \frac{a\gamma^{k+2} + b\gamma^{k+1} + c\gamma^k}{(\gamma - \alpha)^2 + \beta^2} \\
&= R \left\{ \frac{\rho^k [a\rho^2 e^{j(k+1)\varphi} + b\rho e^{jk\varphi} + ce^{j(k-1)\varphi}]}{j \sin\varphi [(\gamma - \alpha)^2 + \beta^2]} \right. \\
&\quad \times \left. \frac{\rho^R \gamma [a\rho^2 e^{j(R+2)\varphi} + b\rho e^{j(R+1)\varphi} + ce^{jR\varphi}]}{\rho j \sin\varphi [(\gamma - \alpha)^2 + \beta^2]} \right\} \\
&\quad + \frac{a\gamma^{k+2} + b\gamma^{k+1} + c\gamma^k}{(\gamma - \alpha)^2 + \beta^2} \\
&= \frac{\rho^k [a\rho^2 \sin(k+1)\varphi + b\rho \sin k\varphi + c \sin(k-1)\varphi]}{\sin\varphi [(\gamma - \alpha)^2 + \beta^2]} \\
&\quad - \frac{\rho^{k-1} \gamma [a\rho^2 \sin(k+2)\varphi + b\rho \sin(k+1)\varphi + c \sin k\varphi]}{\sin\varphi [(\gamma - \alpha)^2 + \beta^2]} \\
&\quad + \frac{\gamma^k (a\gamma^2 + b\gamma + c)}{(\gamma - \alpha)^2 + \beta^2} \quad \textcircled{1}
\end{aligned}$$

这结果对  $k = 0$  也成立。在  $k = 0$  时，可有

①由读者验证： $\varphi = 0$ （即  $\beta = 0$ ），取极限即给出例8。

$$\begin{aligned}
x(0) &= \frac{a\rho^2\sin\varphi - c\sin\varphi - \rho^{-1}\gamma(a\rho^2\sin 2\varphi + b\rho\sin\varphi)}{\sin\varphi[(\gamma - a)^2 + \beta^2]} \\
&\quad + \frac{a\gamma^2 + b\gamma + c}{(\gamma - a)^2 + \beta^2} \\
&= \frac{a\rho^2 - c - \gamma(2a\rho\cos\varphi + b) + a\gamma^2 + b\gamma + c}{(\gamma - a)^2 + \beta^2} \\
&= \frac{a(a^2 + \beta^2) - 2a\gamma a + a\gamma^2}{(\gamma - a)^2 + \beta^2} \\
&= a \\
&= X(\infty)
\end{aligned}$$

例11.  $X(z) = \frac{az^4 + bz^3 + cz^2 + dz}{(z-a)^4}$ , 求  $x(kT)$ 。

$$\begin{aligned}
\text{解 } x(kT) &= \operatorname{res}_a \frac{az^{k+3} + bz^{k+2} + cz^{k+1} + dz^k}{(z-a)^4} \\
&= \frac{1}{3!} \frac{d^3}{ds^3} (az^{k+3} + bz^{k+2} + cz^{k+1} + d \cdot z^k) \Big|_{z=a} \\
&= \frac{1}{6} [a(k+3)(k+2)(k+1)a^k \\
&\quad + b(k+2)(k+1)ka^{k-1} + c(k+1)k(k-1)a^{k-2} \\
&\quad + d \cdot k(k-1)(k-2)a^{k-3}]
\end{aligned}$$

注意这结果对  $k=0$  也成立。在  $k=0$  时, 可有

$$x(0) = \frac{1}{6} a \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = a = X(\infty)$$

特别,  $a=0$ ,  $b=\mu$ ,  $c=4\mu^2$ ,  $d=\mu^3$ ,  $a=\mu$ ,

$$X(z) = \frac{\mu z^3 + 4\mu^2 z^2 + \mu^3 z}{(z - \mu)^4} = \frac{\mu z(z^2 + 4\mu z + \mu^2)}{(z - \mu)^4}$$

$$\begin{aligned} x(kT) &= \frac{1}{6} [\mu(k+2)(k+1)k\mu^{k-1} \\ &\quad + 4\mu^2(k+1)k(k-1)\mu^{k-2} \\ &\quad + \mu^3 k(k-1)(k-2)\mu^{k-3}] \\ &= \frac{1}{6} \mu^k k [(k^2 + 3k + 2) + 4(k^2 - 1) \\ &\quad + (k^2 - 3k + 2)] \\ &= \frac{1}{6} \mu^k k 6k^2 = \mu^k k^3 \end{aligned}$$

这给出表中公式8°。

例12.  $X(z) = \frac{az^4 + bz^3 + cz^2 + d \cdot z}{(z - a)^3(z - \beta)}$ , 求  $x(kT)$ 。

$$\begin{aligned} \text{解 } x(kT) &= \underset{a}{\text{res}} \left[ \frac{az^{k+3} + bz^{k+2} + cz^{k+1} + d \cdot z^k}{(z - a)^3(z - \beta)} \right] \\ &\quad + \underset{\beta}{\text{res}} \left[ \frac{az^{k+3} + bz^{k+2} + cz^{k+1} + dz^k}{(z - a)^3(z - \beta)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{d^2}{dz^2} \frac{az^{k+3} + bz^{k+2} + cz^{k+1} + dz^k}{z - \beta} \right]_{z=a} \\ &\quad + \frac{a\beta^{k+3} + b\beta^{k+2} + c\beta^{k+1} + d \cdot \beta^k}{(\beta - a)^3} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{a(k+3)(k+2)a^{k+1} + b(k+2)(k+1)a^k}{a - \beta} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{c(k+1)ka^{k-1} + d \cdot k(k-1)a^{k-2}}{a-\beta} \\
& - 2 \frac{a(k+3)a^{k+2} + b(k+2)a^{k+1} + c(k+1)a^k + dka^{k-1}}{(a-\beta)^2} \\
& + 2 \cdot \frac{aa^{k+3} + ba^{k+2} + ca^{k+1} + da^k}{(a-\beta)^3} \Big] \\
& - \frac{a\beta^{k+3} + b\beta^{k+2} + c\beta^{k+1} + d \cdot \beta^k}{(a-\beta)^3} \\
& = \frac{1}{2(a-\beta)} [a(k+3)(k+2)a^{k+1} \\
& + b(k+2)(k+1)a^k + c(k+1)ka^{k-1} + d \cdot k(k-1)a^{k-2}] \\
& - \frac{1}{(a-\beta)^2} [a(k+3)a^{k+2} + b(k+2)a^{k+1} + c(k+1)a^k \\
& + dka^{k-1}] + \frac{1}{(a-\beta)^3} [a(a^{k+3} - \beta^{k+3}) \\
& + b(a^{k+2} - \beta^{k+2}) + c(a^{k+1} - \beta^{k+1}) + d(a^k - \beta^k)]
\end{aligned}$$

此结果对  $k=0$  也成立。在  $k=0$  时，可有

$$\begin{aligned}
x(0) &= \frac{6aa + 2b}{2(a-\beta)} - \frac{3aa^2 + 2ba + c}{(a-\beta)^2} \\
&+ \frac{a(a^3 - \beta^3) + b(a^2 - \beta^2) + c(a - \beta)}{(a-\beta)^3} \\
&= \frac{3aa + b}{a-\beta} - \frac{3aa^2 + 2ba + c}{(a-\beta)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a(a^2 + a\beta + \beta^2) + b(a + \beta) + c}{(a - \beta)^2} \\
& = \frac{3a\alpha + b}{a - \beta} + \frac{a(-2a^2 + a\beta + \beta^2) + b(\beta - a)}{(a - \beta)^2} \\
& = \frac{3a\alpha + b}{a - \beta} - \frac{a(\beta + 2a) + b}{a - \beta} = \frac{a\alpha + a\beta}{a - \beta} \\
& = a = X(\infty)
\end{aligned}$$

例13.  $X(z) = \frac{az^4 + bz^3 + cz^2 + d \cdot z}{(z - \alpha)^2(z - \beta)^2}$ , 求  $x(kT)$ 。

解 
$$\begin{aligned}
x(kT) &= \underset{\alpha}{res} \left[ \frac{az^{k+3} + bz^{k+2} + cz^{k+1} + dz^k}{(z - \alpha)^2(z - \beta)^2} \right] \\
&\quad + \underset{\beta}{res} \left[ \frac{az^{k+3}}{(z - \alpha)^2(z - \beta)^2} \right] \\
&= \left[ \frac{d}{dz} \frac{az^{k+3} + bz^{k+2} + cz^{k+1} + d \cdot z^k}{(z - \beta)^2} \right]_{z=\beta} \\
&\quad + \left[ \frac{d}{dz} \frac{az^{k+3} + bz^{k+2} + cz^{k+1} + d \cdot z^k}{(z - \alpha)^2} \right]_{z=\alpha} \\
&= \frac{a(k+3)(\alpha^{k+2} + \beta^{k+2}) + b(k+2)(\alpha^{k+1} + \beta^{k+1})}{(a - \beta)^2} \\
&\quad + \frac{c(k+1)(\alpha^k + \beta^k) + dk(\alpha^{k-1} + \beta^{k-1})}{(a - \beta)^2} \\
&\quad - 2 \frac{a(\alpha^{k+3} - \beta^{k+3}) + b(\alpha^{k+2} - \beta^{k+2})}{(a - \beta)^3}
\end{aligned}$$



$$+ c \frac{(a^{k+1} - \beta^{k+1}) + d(a^k - \beta^k)}{(a - \beta)^3}$$

这公式对  $k = 0$  也成立。在  $k = 0$  时，可有

$$\begin{aligned} x(0) &= \frac{3a(a^2 + \beta^2) + 2b(a + \beta) + 2c}{(a - \beta)^2} \\ &\quad - 2 \frac{a(a^3 - \beta^3) + b(a^2 - \beta^2) + c(a - \beta)}{(a - \beta)^3} \\ &= \frac{3a(a^2 + \beta^2) + 2b(a + \beta) + 2c}{(a - \beta)^2} \\ &\quad - 2 \frac{a(a^2 + a\beta + \beta^2) + b(a + \beta) + c}{(a - \beta)^2} \\ &= \frac{a(a^2 - 2a\beta + \beta^2)}{(a - \beta)^2} = a = X(\infty) \end{aligned}$$

例14.  $X(z) = \frac{az^4 + bz^3 + cz^2 + dz}{(z - a)^2(z - \beta)(z - \gamma)},$

求  $x(kT)$ 。

$$\begin{aligned} \text{解 } x(kT) &= \underset{a}{res} \left[ \frac{az^{k+3} + bz^{k+2} + cz^{k+1} + d \cdot z^k}{(z - a)^2(z - \beta)(z - \gamma)} \right] \\ &\quad + \underset{\beta}{res} \left[ \frac{az^{k+3} + bz^{k+2} + cz^{k+1} + dz^k}{(z - a)^2(z - \beta)(z - \gamma)} \right] \\ &\quad + \underset{\gamma}{res} \left[ \frac{az^{k+3} + bz^{k+2} + cz^{k+1} + dz^k}{(z - a)^2(z - \beta)(z - \gamma)} \right] \\ &= \left[ \frac{d}{dz} \frac{az^{k+3} + bz^{k+2} + cz^{k+1} + d \cdot z^k}{(z - \beta)(z - \gamma)} \right]_{z=a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a\beta^{k+3} + b\beta^{k+2} + c\beta^{k+1} + d \cdot \beta^k}{(\beta - a)^2(\beta - \gamma)} \\
& + \frac{a\gamma^{k+3} + b\gamma^{k+2} + c\gamma^{k+1} + d \cdot \gamma^k}{(\gamma - a)^2(\gamma - \beta)} \\
& = \frac{a(k+3)a^{k+2} + b(k+2)a^{k+1}}{(a - \beta)(a - \gamma)} \\
& + \frac{c(k+1)a^k + d \cdot k a^{k-1}}{(a - \beta)(a - \gamma)} \\
& - \frac{(a\alpha^{k+3} + b\alpha^{k+2} + c\alpha^{k+1} + d \cdot \alpha^k)}{(a - \beta)^2} \\
& \times \frac{(2a - \beta - \gamma)}{(a - \gamma)^2} \\
& + \frac{a\beta^{k+3} + b\beta^{k+2} + c\beta^{k+1} + d \cdot \beta^k}{(\beta - a)^2(\beta - \gamma)} \\
& + \frac{a\gamma^{k+3} + b\gamma^{k+2} + c\gamma^{k+1} + d \cdot \gamma^k}{(\gamma - a)^2(\gamma - \beta)}
\end{aligned}$$

这结果对  $k = 0$  也成立。在  $k = 0$  时有

$$\begin{aligned}
x(0) &= \frac{3a\alpha^2 + 2ba + c}{(a - \beta)(a - \gamma)} \\
& - \frac{(a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d)(2a - \beta - \gamma)}{(a - \beta)^2(a - \gamma)^2} \\
& + \frac{a\beta^3 + b\beta^2 + c\beta + d}{(\beta - a)^2(\beta - \gamma)} + \frac{a\gamma^3 + b\gamma^2 + c\gamma + d}{(\gamma - a)^2(\gamma - \beta)}
\end{aligned}$$

把右端第二项分子的因子  $2a - \beta - \gamma$  写成  $(a - \beta) + (a - \gamma)$ ，然后将这项分为两项，各与第三项及第四项结合，可有

$$\begin{aligned}
x(0) &= \frac{3 a \alpha^2 + 2 b \alpha + c}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} \\
&+ \left\{ \frac{a \beta^3 + b \beta^2 + c \beta + d}{(\beta - \alpha)^2(\beta - \gamma)} - \frac{a \alpha^3 + b \alpha^2 + c \alpha + d}{(\alpha - \beta)^2(\alpha - \gamma)} \right\} \\
&+ \left\{ \frac{a \gamma^3 + b \gamma^2 + c \gamma + d}{(\gamma - \alpha)^2(\gamma - \beta)} - \frac{a \alpha^3 + b \alpha^2 + c \alpha + d}{(\alpha - \gamma)^2(\alpha - \beta)} \right\} \\
&= \frac{3 a \alpha^2 + 2 b \alpha + c}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} \\
&+ \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \frac{(a \beta^3 + b \beta^2 + c \beta + d)(\alpha - \gamma)}{(\beta - \gamma)(\alpha - \gamma)} \\
&- \frac{(a \alpha^3 + b \alpha^2 + c \alpha + d)(\beta - \gamma)}{(\beta - \gamma)(\alpha - \gamma)} \\
&+ \frac{1}{(\alpha - \gamma)^2} \left\{ \frac{(a \gamma^3 + b \gamma^2 + c \gamma + d)(\alpha - \beta)}{(\gamma - \beta)(\alpha - \beta)} \right. \\
&- \left. \frac{(a \alpha^3 + b \alpha^2 + c \alpha + d)(\gamma - \beta)}{(\gamma - \beta)(\alpha - \beta)} \right\} \\
&= \frac{3 a \alpha^2 + 2 b \alpha + c}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} \\
&+ \frac{-[a \alpha \beta(\beta + \alpha) + b \alpha \beta - d]}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)} \\
&+ \frac{r[a(\beta^2 + \beta \alpha + \alpha^2) + b(\beta + \alpha) + c]}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)} \\
&+ \frac{-[a \alpha \gamma(\gamma + \alpha) + b \alpha \gamma + d]}{(\alpha - \gamma)(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\beta[a(\gamma^2 + \gamma\alpha + \alpha^2) + b(\gamma + \alpha) + c]}{(\alpha - \gamma)(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)} \\
& = \frac{3\alpha\alpha^2 + 2b\alpha + c}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} \\
& \quad - \frac{2\alpha\alpha^2 + 2b\alpha + \alpha\alpha\beta + \alpha\alpha\gamma - \alpha\beta\gamma + c}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} \\
& = \frac{\alpha\alpha^2 - \alpha\alpha\beta - \alpha\alpha\gamma + \alpha\beta\gamma}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} \\
& = a \\
& = X(\infty)
\end{aligned}$$

例15.  $X(z) = \frac{az^4 + bz^3 + cz^2 + d \cdot z}{[(z - \alpha)^2 + \beta^2]^2}$ , 求  $x(kT)$

解  $\alpha = \rho \cos \varphi$ ,  $\beta = \rho \sin \varphi$ , 分母四零点为  
 $\rho e^{\pm j\varphi}$ ,  $\rho e^{\pm j\varphi}$ 。

$$\begin{aligned}
x(kT) &= 2R \left\{ \text{res}_{\rho e^{j\varphi}} \frac{az^{k+3} + bz^{k+2} + cz^{k+1} + d \cdot z^k}{(z - \rho e^{j\varphi})^2(z - \rho e^{-j\varphi})^2} \right\} \\
&= 2R \left\{ \left[ \frac{d}{dz} \frac{az^{k+3} + bz^{k+2} + cz^{k+1} + d \cdot z^k}{(z - \rho e^{-j\varphi})^2} \right]_{z = \rho e^{j\varphi}} \right\} \\
&= 2R \left\{ \rho^{k-1} \left[ \frac{a(k+3)\rho^3 e^{j(k+2)\varphi} + b(k+2)\rho^2 e^{j(k+1)\varphi}}{\rho^2(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi})^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{c(k+1)\rho e^{jk\varphi} + d \cdot k e^{j(k-1)\varphi}}{\rho^2(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi})^2} \right] \right. \\
&\quad \left. - 2\rho^k \left[ \frac{a\rho^3 e^{j(k+3)\varphi} + b\rho^2 e^{j(k+2)\varphi}}{\rho^2(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi})^3} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{c \rho e^{j(k+1)\varphi} + d \cdot e^{jk\varphi}}{\rho^3 (e^{j\varphi} - e^{-j\varphi})^3} \Bigg\} \\
= & - \frac{1}{2\beta^2} \rho^{k-1} [a(k+3)\rho^2 \cos(k+2)\varphi \\
& + b(k+2)\rho^2 \cos(k+1)\varphi + c(k+1)\rho \cos k\varphi \\
& + d \cdot k \cos(k-1)\varphi] \\
& + \frac{1}{2\beta^3} \rho^k [a\rho^3 \sin(k+3)\varphi + b\rho^2 \sin(k+2)\varphi \\
& + c\rho \sin(k+1)\varphi + d \cdot \sin k\varphi]
\end{aligned}$$

这结果对  $k=0$  也成立, 在  $k=0$ , 有

$$\begin{aligned}
x(0) &= - \frac{1}{2\beta^2} \rho^{-1} (3a\rho^2 \cos 2\varphi + 2b\rho^2 \cos \varphi + c\rho) \\
&+ \frac{1}{2\beta^3} (a\rho^3 \sin 3\varphi + b\rho^2 \sin 2\varphi + c\rho \sin \varphi) \\
&= - \frac{1}{2\beta^2} [3a(a^2 - \beta^2) + 2ba + c] \\
&+ \frac{1}{2\beta^3} [a\beta(3a^2 - \beta^2) + 2ba\beta + c\beta] \\
&= \frac{1}{2\beta^2} \cdot a \cdot 2\beta^2 \\
&= a \\
&= X(\infty)
\end{aligned}$$

## § 9 Z 变换 (表续)

现将§ 8 例 3 及以后各例结果汇总如下。

### z 变换表续

$$36^{\circ} \quad Z^{-1} \left[ \frac{az}{z-a} \right] = a a^k \quad (a=0 \text{ 也成立, 阅§8. 例 3}$$

底注①)

$$37^{\circ} \quad Z^{-1} \left[ \frac{az^2 + bz}{(z-a)^2} \right] = a(k+1)a^k + bka^{k-1}$$

$$38^{\circ} \quad Z^{-1} \left[ \frac{az^2 + bz}{(z-a)(z-\beta)} \right] \\ = \frac{a(a^{k+1} - \beta^{k+1}) + b(a^k - \beta^k)}{a - \beta}$$

$$39^{\circ} \quad Z^{-1} \left[ \frac{az^2 + bz}{(z-a)^2 + \beta^2} \right] = \frac{1}{\beta} \rho^k [a \rho \sin(k+1)\varphi \\ + b \sin k\varphi]$$

$$(a = \rho \cos \varphi, \beta = \rho \sin \varphi)$$

$$40^{\circ} \quad Z^{-1} \left[ \frac{az^3 + bz^2 + cz}{(z-a)^3} \right] = \frac{a}{2}(k+2)(k+1)a^k \\ + \frac{b}{2}(k+1)ka^{k-1} + \frac{c}{2}k(k-1)a^{k-2}$$

$$41^{\circ} \quad Z^{-1} \left[ \frac{az^3 + bz^2 + cz}{(z-a)^2(z-\beta)} \right]$$



$$= \frac{a(k+2)a^{k+1} + b(k+1)a^k + ca^{k-1}}{a-\beta}$$

$$- \frac{a(a^{k+2} - \beta^{k+2}) + b(a^{k+1} - \beta^{k+1}) + c(a^k - \beta^k)}{(a-\beta)^2}$$

$$42^\circ \quad Z^{-1} \left[ \frac{az^3 + bz^2 + cz}{(z-a)(z-\beta)(z-\gamma)} \right]$$

$$= \frac{aa^{k+2} + ba^{k+1} + ca^k}{(a-\beta)(a-\gamma)}$$

$$+ \frac{a\beta^{k+2} + b\beta^{k+1} + c\beta^k}{(\beta-a)(\beta-\gamma)}$$

$$+ \frac{a\gamma^{k+2} + b\gamma^{k+1} + c\gamma^k}{(\gamma-a)(\gamma-\beta)}$$

$$43^\circ \quad Z^{-1} \left[ \frac{az^3 + bz^2 + cz}{[(z-a)^2 + \beta^2](z-\gamma)} \right]$$

$$= \frac{\rho^k [a\rho^2 \sin(k+1)\varphi + b\rho \sin k\varphi + c \sin(k-1)\varphi]}{\sin\varphi[(\gamma-a)^2 + \beta^2]}$$

$$- \frac{\rho^{k-1}\gamma [a\rho^2 \sin(k+2)\varphi + b\rho \sin(k+1)\varphi + c \sin k\varphi]}{\sin\varphi[(\gamma-a)^2 + \beta^2]}$$

$$+ \frac{\gamma^k(a\gamma^2 + b\gamma + c)}{(\gamma-a)^2 + \beta^2} \quad (a = \rho \cos\varphi, \beta = \rho \sin\varphi)$$

$$44^\circ \quad Z^{-1} \left[ \frac{az^4 + bz^3 + cz^2 + d \cdot z}{(z-a)^4} \right]$$

$$= \frac{1}{6} [a(k+3)(k+2)(k+1)a^k +$$

$$+ b(k+2)(k+1)k a^{k-1} + c(k+1)k(k-1) a^{k-2} \\ + d \cdot k(k-1)(k-2) a^{k-3}]$$

$$45^{\circ} \quad Z^{-1} \left[ \frac{a z^4 + b z^3 + c z^2 + d \cdot z}{(z-a)^3(z-\beta)} \right] \\ = \frac{a(k+3)(k+2) a^{k+1} + b(k+2)(k+1) a^k}{2(a-\beta)} \\ + \frac{c(k+1)k a^{k-1} + d \cdot k(k-1) a^{k-2}}{2(a-\beta)} \\ - \frac{a(k+3) a^{k+2} + b(k+2) a^{k+1}}{(a-\beta)^2} \\ + \frac{c(k+1) a^k + d \cdot k a^{k-1}}{(a-\beta)^2} \\ + \frac{a(a^{k+3} - \beta^{k+3}) + b(a^{k+2} - \beta^{k+2})}{(a-\beta)^3} \\ + \frac{c(a^{k+1} - \beta^{k+1}) + d \cdot (a^k - \beta^k)}{(a-\beta)^3}$$

$$46^{\circ} \quad Z^{-1} \left[ \frac{a z^4 + b z^3 + c z^2 + d \cdot z}{(z-a)^2(z-\beta)^2} \right] \\ = \frac{a(k+3)(a^{k+2} + \beta^{k+2}) + b(k+2)(a^{k+1} + \beta^{k+1})}{(a-\beta)^2} \\ + \frac{c(k+1)(a^k + \beta^k) + d \cdot k(a^{k-1} + \beta^{k-1})}{(a-\beta)^2} \\ - 2 \frac{a(a^{k+3} - \beta^{k+3}) + b(a^{k+2} - \beta^{k+2})}{(a-\beta)^3}$$

$$+ \frac{c(a^{k+1} - \beta^{k+1}) + d(a - \beta_k)}{(a - \beta)^3}$$

$$47^\circ \quad Z^{-1} \left[ \frac{az^4 + bz^3 + cz^2 + d \cdot z}{(z - a)^2(z - \beta)(z - \gamma)} \right]$$

$$= \frac{a(k+3)a^{k+2} + b(k+2)a^{k+1}}{(a - \beta)(a - \gamma)}$$

$$+ \frac{c(k+1)a^k + d \cdot k a^{k-1}}{(a - \beta)(a - \gamma)}$$

$$- \frac{a^k(a a^3 + b a^2 + c a + d)(2a - \beta - \gamma)}{(a - \beta)^2(a - \gamma)^2}$$

$$+ \frac{\beta^k(a \beta^3 + b \beta^2 + c \beta + d)}{(\beta - a)^2(\beta - \gamma)} + \frac{\gamma^k(a \gamma^3 + b \gamma^2 + c \gamma + d)}{(\gamma - a)^2(\gamma - \beta)}$$

$$48^\circ \quad Z^{-1} \left[ \frac{az^4 + bz^3 + cz^2 + d \cdot z}{(z - a)(z - \beta)(z - \gamma)(z - \delta)} \right]$$

$$= \frac{a^k(a a^3 + b a^2 + c a + d)}{(a - \beta)(a - \gamma)(a - \delta)}$$

$$+ \frac{\beta^k(a \beta^3 + b \beta^2 + c \beta + d)}{(\beta - a)(\beta - \gamma)(\beta - \delta)}$$

$$+ \frac{\gamma^k(a \gamma^3 + b \gamma^2 + c \gamma + d)}{(\gamma - a)(\gamma - \beta)(\gamma - \delta)} + \frac{\delta^k(a \delta^3 + b \delta^2 + c \delta + d)}{(\delta - a)(\delta - \beta)(\delta - \gamma)}$$

$$49^\circ \quad Z^{-1} \left[ \frac{az^4 + bz^3 + cz^2 + d \cdot z}{[(z - a)^2 + \beta^2]^2} \right]$$

$$= - \frac{1}{2 \beta^2} \rho^{k-1} [a \rho^3 (k+3) \cos(k+2)\varphi +$$

$$+ b \rho^2 (k+2) \cos(k+1)\varphi + c \rho (k+1) \cos k\varphi \\ + d \cdot k \cos(k-1)\varphi]$$

$$+ \frac{1}{2 \beta^3} \rho^k [a \rho^3 \sin(k+3)\varphi + b \rho^2 \sin(k+2)\varphi \\ + c \rho \sin(k+1)\varphi + d \sin k\varphi]$$

$$(a = \rho \cos \varphi, \quad \beta = \rho \sin \varphi)$$

$$\begin{aligned} 50^\circ \quad Z^{-1} & \left[ \frac{a z^4 + b z^3 + c z^2 + d \cdot z}{[(z-a)^2 + \beta^2](z-\gamma)^2} \right] \\ &= \frac{\rho^{k+1} [a \rho^3 \sin(k+1)\varphi + b \rho^2 \sin k\varphi]}{\sin \varphi [(\gamma-a)^2 + \beta^2]^2} \\ &+ \frac{\rho^{k+1} [c \rho \sin(k-1)\varphi + d \cdot \sin(k-2)\varphi]}{\sin \varphi [(\gamma-a)^2 + \beta^2]^2} \\ &- \frac{2 \rho^k \gamma [a \rho^3 \sin(k+2)\varphi + b \rho^2 \sin(k+1)\varphi]}{\sin \varphi [(\gamma-a)^2 + \beta^2]^2} \\ &- \frac{2 \rho^k \gamma [c \rho \sin k\varphi + d \cdot \sin(k-1)\varphi]}{\sin \varphi [(\gamma-a)^2 + \beta^2]^2} \\ &+ \frac{\rho^{k-1} \gamma^2 [a \rho^3 \sin(k+3)\varphi + b \rho^2 \sin(k+2)\varphi]}{\sin \varphi [(\gamma-a)^2 + \beta^2]^2} \\ &+ \frac{\rho^{k-1} \gamma^2 [c \rho \sin(k+1)\varphi + d \cdot \sin k\varphi]}{\sin \varphi [(\gamma-a)^2 + \beta^2]^2} \\ &+ \frac{\gamma^{k-1} [a(k+3)\gamma^3 + b(k+2)\gamma^2 + c(k+1)\gamma + d \cdot k]}{(\gamma-a)^2 + \beta^2} \end{aligned}$$

$$-2(\gamma - a) \frac{\gamma^k (a\gamma^3 + b\gamma^2 + c\gamma + d)}{[(\gamma - a)^2 + \beta^2]^2} \quad \begin{pmatrix} a = \rho \cos \varphi \\ \beta = \rho \sin \varphi \end{pmatrix}$$

公式 $36^\circ$ — $50^\circ$ ，除 $48^\circ$ 及 $50^\circ$ 外，均已见 § 8 各例。至于 $48^\circ$ 证明较易，读者自己作。对于 $50^\circ$ ，设

$$X(z) = \frac{az^4 + bz^3 + cz^2 + d \cdot z}{[(z - a)^2 + \beta^2](z - \gamma)^2}$$

令 $a = \rho \cos \varphi$ ， $\beta = \rho \sin \varphi$ ，则 $X(z)$ 的分母的零点为

$$\rho e^{i\varphi}, \rho e^{-i\varphi}, \gamma, \gamma,$$

故

$$\begin{aligned} Z^{-1}[X(z)] &= 2R \left\{ \underset{\rho e^{i\varphi}}{res} [z^{k-1} X(z)] \right. \\ &\quad \left. + \underset{\gamma}{res} [z^{k-1} X(z)] \right\} \\ &= 2R \left\{ \underset{\rho e^{i\varphi}}{res} \frac{az^{k+3} + bz^{k+2} + cz^{k+1} + d \cdot z^k}{(z - \rho e^{i\varphi})(z - \rho e^{-i\varphi})(z - \gamma)^2} \right\} \\ &\quad + \underset{\gamma}{res} \frac{az^{k+3} + bz^{k+2} + cz^{k+1} + d \cdot z^k}{[(z - a)^2 + \beta^2](z - \gamma)^2} \\ &= 2R \rho^k \left[ \frac{a \rho^3 e^{i(k+3)\varphi} + b \rho^2 e^{i(k+2)\varphi}}{(\rho e^{i\varphi} - \rho e^{-i\varphi})(\rho e^{i\varphi} - \gamma)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{c \rho e^{i(k+1)\varphi} + d \cdot e^{ik\varphi}}{(\rho e^{i\varphi} - \rho e^{-i\varphi})(\rho e^{i\varphi} - \gamma)^2} \right] \\ &\quad + \left[ \frac{d}{dz} \frac{az^{k+3} + bz^{k+2} + cz^{k+1} + d \cdot z^k}{(z - a)^2 + \beta^2} \right]_{z=\gamma} \\ &= R \left\{ \rho^k \left[ \frac{a \rho^3 e^{i(k+3)\varphi} + b \rho^2 e^{i(k+2)\varphi}}{\rho j \sin \varphi (\rho e^{i\varphi} - \gamma)^2} + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{c\rho e^{j(k+1)\varphi} \cdot d \cdot e^{jk\varphi}}{\rho j \sin\varphi (\rho e^{j\varphi} - \gamma)^2} \left] \cdot \frac{(\rho e^{-j\varphi} - \gamma)^2}{(\rho e^{-j\varphi} - \gamma)^2} \right\} \\
& + \frac{a(k+3)\gamma^{k+2} + b(k+2)\gamma^{k+1} + c(k+1)\gamma^k}{(\gamma - a)^2 + \beta^2} \\
& + \frac{d \cdot k \gamma^{k-1}}{(\gamma - a)^2 + \beta^2} \\
& - 2(\gamma - a) \frac{a\gamma^{k+3} + b\gamma^{k+2} + c\gamma^{k+1} + d \cdot \gamma^k}{[(\gamma - a)^2 + \beta^2]^2}
\end{aligned}$$

注意  $(\rho e^{j\varphi} - \gamma)^2 (\rho e^{-j\varphi} - \gamma)^2 = [(\gamma - a)^2 + \beta^2]^2$ ，并分出上式的实部即得50°。前表1°—35°便于查 $z$ 变换，续表36°—50°便于查反 $z$ 变换。

## § 10 反 $Z$ 变换的数字例子

例1.  $X(z) = \frac{z^2 - z}{(z - 2)^2}$ ，求  $Z^{-1}[X(z)]$

解 用37°，可立刻得到

$$Z^{-1}[X(z)] = (k+1)2^k - k \cdot 2^{k-1} = 2^{k-1}(k+2)$$

验.  $Z[2^{k-1}(k+2)] = \frac{1}{2}Z[2^k k] + Z[2^k]$

$$= \frac{z}{(z-2)^2} + \frac{z}{z-2} = \frac{z^2 - z}{(z-2)^2} \quad (\text{由4°及2°})$$

例2.  $X(z) = \frac{z^2 - z}{z^2 - z - 2}$ ，求  $Z^{-1}[X(z)]$

解.  $X(z) = \frac{z^2 - z}{(z+1)(z-2)}$ , 由38°, 可有

$$\begin{aligned} Z^{-1}[X(z)] &= \frac{(-1)^{k+1} - 2^{k+1} - [(-1)^k - 2^k]}{-3} \\ &= \frac{2}{3}(-1)^k + \frac{1}{3} \cdot 2^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{验. } Z\left[\frac{2}{3}(-1)^k + \frac{1}{3} \cdot 2^k\right] &= \frac{2}{3} Z[(-1)^k] \\ &\quad + \frac{1}{3} Z[2^k] \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{z}{z+1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{z}{z-2} \\ &= \frac{z^2 - z}{z^2 - z - 2} \quad (\text{由2°}) \end{aligned}$$

例3.  $X(z) = \frac{z^2 - z}{z^2 + 2z + 2}$ , 求  $Z^{-1}[X(z)]$

解  $X(z) = \frac{z^2 + z}{(z+1)^2 + 1}$ , 按39°, 有

$$\begin{aligned} Z^{-1}[X(z)] &= (\sqrt{2})^k \left\{ \sqrt{2} \sin \left[ (k+1) \frac{3\pi}{4} \right] \right. \\ &\quad \left. + \sin \frac{3k\pi}{4} \right\} = (\sqrt{2})^k \cos \frac{3k\pi}{4} \end{aligned}$$

验证 按14°, 可有



$$Z\left[(\sqrt{2})^k \cos \frac{3k\pi}{4}\right] = \frac{z[z - \sqrt{2} \cos(3\pi/4)]}{z^2 - 2\sqrt{2}z \cos(3\pi/4) + 2}$$

$$= \frac{z(z+1)}{z^2 + 2z + 2}$$

例4.  $X(z) = \frac{z^3 - z^2}{(z+1)^2(z-2)}$ , 求  $Z^{-1}[X(z)]$

解 按41°, 可有

$$Z^{-1}[X(z)] = -\frac{1}{3}[(k+2)(-1)^{k+1} - (k+1)(-1)^k]$$

$$= -\frac{1}{9}[(-1)^{k+2} - 2^{k+2} - \{(-1)^{k+1} - 2^{k+1}\}]$$

$$= \frac{1}{3}(-1)^k(2k+3) - \frac{1}{9}[2(-1)^k - 2^{k+1}]$$

$$= \frac{1}{9}(6k+7)(-1)^k + \frac{2}{9} \cdot 2^k$$

验证 按2°及4°, 可有

$$Z\left[\frac{1}{9}(6k+7)(-1)^k + \frac{2}{9} \cdot 2^k\right]$$

$$= \frac{6}{9} Z[k(-1)^k] + \frac{7}{9} Z[(-1)^k] + \frac{2}{9} Z[2^k]$$

$$= \frac{1}{9} \left\{ -\frac{6z}{(z+1)^2} + \frac{7z}{z+1} + \frac{2z}{z-2} \right\}$$

$$= \frac{z^2 - z}{(z+1)^2(z-2)}$$

$$\text{例5. } X(z) = \frac{z^3 + 2z}{(z-1)(z+1)(z-2)},$$

求  $Z^{-1}[X(z)]$

解 按42°, 可有

$$\begin{aligned} Z^{-1}[X(z)] &= \frac{3}{-2} + \frac{(-1)^{k+2} + 2(-1)^{k+1}}{6} \\ &\quad + \frac{2^{k+2} + 2 \cdot 2^{k+1}}{3} \\ &= -\frac{3}{2} - \frac{1}{6}(-1)^k + \frac{8}{3} \cdot 2^k \end{aligned}$$

读者试用2°验证这结果。

$$\text{例6. } X(z) = \frac{z^3 + 2z^2}{(z^2 + 2z + 2)(z-1)},$$

求  $Z^{-1}[X(z)]$

解 按43°, 可有

$$\begin{aligned} Z^{-1}[X(z)] &= \frac{1}{5} (\sqrt{2})^{k+1} \left\{ 2 \sin \left[ (k+1) \frac{3\pi}{4} \right] \right. \\ &\quad \left. + 2\sqrt{2} \sin \frac{3k\pi}{4} \right\} \\ &\quad - \frac{1}{5} (\sqrt{2})^k \left\{ 2 \sin \left[ (k+2) \frac{3\pi}{4} \right] \right. \\ &\quad \left. + 2\sqrt{2} \sin \left[ (k+1) \frac{3\pi}{4} \right] \right\} + \frac{3}{5} \\ &= \frac{1}{5} (\sqrt{2})^{k+1} \left\{ -\sqrt{2} \sin \frac{3k\pi}{4} + \sqrt{2} \cos \frac{3k\pi}{4} \right. \\ &\quad \left. + 2\sqrt{2} \sin \frac{3k\pi}{4} \right\} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{5} (\sqrt{2})^k \left\{ -2\cos\frac{3k\pi}{4} - 2\sin\frac{3k\pi}{4} + 2\cos\frac{3k\pi}{4} \right\} + \frac{3}{5} \\
& = \frac{2}{5} (\sqrt{2})^k \left( \cos\frac{3k\pi}{4} + 2\sin\frac{3k\pi}{4} \right) + \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

由读者用 $14^\circ$ 及 $15^\circ$ 验证这结果。

例7.  $X(z) = \frac{z^3 + 2z^2}{(z+1)^3}$ , 求 $Z^{-1}[X(z)]$

解 按 $40^\circ$ , 可有

$$\begin{aligned}
Z^{-1}[X(z)] &= \frac{1}{2}(k+2)(k+1)(-1)^k \\
&\quad + (k+1)k(-1)^{k-1} \\
&= \frac{1}{2}(-1)^k(-k^2 + k + 2)
\end{aligned}$$

读者可用 $6^\circ$ ,  $4^\circ$ ,  $2^\circ$ 验此结果。

例8.  $X(z) = \frac{z^4 + 2z^3}{(z+1)^4}$ , 求 $Z^{-1}[X(z)]$

解 按 $44^\circ$ , 可有

$$\begin{aligned}
Z^{-1}[X(z)] &= \frac{1}{6}\{(k+3)(k+2)(k+1)(-1)^k \\
&\quad + 2(k+2)(k+1)k(-1)^{k-1}\} \\
&= \frac{1}{6}(-1)^k(-k^3 + 7k + 6)
\end{aligned}$$

读者试用 $8^\circ$ ,  $4^\circ$ ,  $2^\circ$ 验证此结果。

例9.  $X(z) = \frac{z^3 + 2z}{(z-1)^3(z+1)}$ , 求 $Z^{-1}[X(z)]$

解 按 $45^\circ$ , 可有

$$\begin{aligned} Z^{-1}[X(z)] &= \frac{1}{4}[(k+2)(k+1) + 2k(k-1)] \\ &\quad - \frac{1}{4}[(k+2) + 2k] \\ &\quad + \frac{1}{8}\{[1 - (-1)^{k+2}] + 2[1 - (-1)^k]\} \\ &= \frac{1}{8}(6k^2 - 4k + 3) - \frac{3}{8}(-1)^k \end{aligned}$$

读者试用 $5^\circ$ ,  $3^\circ$ ,  $1^\circ$ ,  $2^\circ$ 验证此结果。

例10.  $X(z) = \frac{z^3 + 2z}{(z^2 - 1)^2}$ , 求 $Z^{-1}[X(z)]$

解  $X(z) = \frac{z^3 + 2z}{(z-1)^2(z+1)^2}$ , 按 $46^\circ$ , 可有

$$\begin{aligned} Z^{-1}[X(z)] &= \frac{1}{4}\{(k+2)[1 + (-1)^{k+1}] \\ &\quad + 2k[1 + (-1)^{k-1}]\} \\ &\quad - 2\frac{1}{8}\{[1 - (-1)^{k+2}] + 2[1 - (-1)^k]\} \\ &= \frac{1}{4}(3k - 1) - \frac{3}{4}k(-1)^k + \frac{1}{4}(-1)^k \end{aligned}$$

由读者用 $1^\circ$ ,  $2^\circ$ ,  $3^\circ$ ,  $4^\circ$ 验证此结果

例11.  $X(z) = \frac{z^3 + 2z}{(z-1)^2(z+1)(z-2)}$ ,

求 $Z^{-1}[X(z)]$

解 按47°, 可有

$$\begin{aligned} Z^{-1}[X(z)] &= \frac{(k+2) + 2k}{-2} - \frac{3}{4} \\ &\quad + \frac{(-1)^{k+2} + 2(-1)^k}{-12} + \frac{2^{k+2} + 2 \cdot 2^k}{3} \\ &= -\frac{3}{2}k - \frac{7}{4} - \frac{1}{4}(-1)^k + 2 \cdot 2^k \end{aligned}$$

例12.  $X(z) = \frac{z^3 + 2z}{(z^2 + 2z + 2)^2}$ , 求  $Z^{-1}[X(z)]$

解 按49°,  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $c = 0$ ,  $d = 2$ ,  $\alpha = -1$ ,

$$\beta = 1, \rho = \sqrt{2}, \varphi = 3\pi/4,$$

$$\begin{aligned} Z^{-1}[X(z)] &= -\frac{1}{2} (\sqrt{2})^{k-1} \left\{ 2(k+2) \cos \right. \\ &\quad \times \left[ (k+1) \frac{3\pi}{4} \right] + 2k \cos \left[ (k-1) \frac{3\pi}{4} \right] \Big\} \\ &\quad + \frac{1}{2} (\sqrt{2})^k \left\{ 2 \sin \left[ (k+2) \frac{3\pi}{4} \right] + 2 \sin \frac{3k\pi}{4} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} (\sqrt{2})^{k-1} \left\{ -2\sqrt{2} k \cos \frac{3k\pi}{4} \right. \\ &\quad \left. - 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{3k\pi}{4} + \sin \frac{3k\pi}{4} \right) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} (\sqrt{2})^k \left\{ -2 \cos \frac{3k\pi}{4} + 2 \sin \frac{3k\pi}{4} \right\} \end{aligned}$$

$$= (\sqrt{2})^k \left( k \cos \frac{3k\pi}{4} + 2 \sin \frac{3k\pi}{4} \right)$$

验证：由  $24^\circ$ ,  $15^\circ$ , 可有

$$\begin{aligned} Z \left[ (\sqrt{2})^k \left( k \cos \frac{3k\pi}{4} + 2 \sin \frac{3k\pi}{4} \right) \right] \\ = \frac{-z(z^2 + 2) - 4z^2}{(z^2 + 2z + 2)^2} + \frac{2z}{z^2 + 2z + 2} \\ = \frac{z^3 + 2z}{(z^2 + 2z + 2)^2} \end{aligned}$$

例13.  $X(z) = \frac{z^3 + 2z}{(z^2 + 2z + 2)(z - 1)^2},$

求  $Z^{-1}[X(z)]$

解 按  $50^\circ$ ,  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $c = 0$ ,  $d = 2$ ,

$$a = -1, \beta = 1, \gamma = 1, \rho = \sqrt{2}, \varphi = 3\pi/4.$$

$$\begin{aligned} Z^{-1}[X(z)] &= \frac{1}{25} (\sqrt{2})^{k+2} \left\{ 2 \sin \frac{3k\pi}{4} \right. \\ &\quad \left. + 2 \sin \left[ (k-2) \frac{3\pi}{4} \right] \right\} \\ &\quad - \frac{2}{25} (\sqrt{2})^{k+1} \left\{ 2 \sin \left[ (k+1) \frac{3\pi}{4} \right] \right. \\ &\quad \left. + 2 \sin \left[ (k-1) \frac{3\pi}{4} \right] \right\} \\ &\quad + \frac{1}{25} (\sqrt{2})^k \left\{ 2 \sin \left[ (k+2) \frac{3\pi}{4} \right] \right. \\ &\quad \left. + 2 \sin \frac{3k\pi}{4} \right\} + \frac{1}{5} (k+2+2k) - 4 \cdot \frac{3}{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{25} (\sqrt{2})^k \left( 4 \sin \frac{3k\pi}{4} + 4 \cos \frac{3k\pi}{4} \right) \\
&\quad + \frac{2}{25} (\sqrt{2})^k \left( 4 \sin \frac{3k\pi}{4} \right) \\
&\quad + \frac{1}{25} (\sqrt{2})^k \left( -2 \cos \frac{3k\pi}{4} + 2 \sin \frac{3k\pi}{4} \right) \\
&\quad + \frac{1}{25} (15k - 2) \\
&= \frac{2}{25} (\sqrt{2})^k \left( 7 \sin \frac{3k\pi}{4} + \cos \frac{3k\pi}{4} \right) \\
&\quad + \frac{1}{25} (15k - 2)
\end{aligned}$$

验证：按  $14^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $3^\circ$ ,  $1^\circ$ , 可有

$$\begin{aligned}
&Z \left[ \frac{2}{25} (\sqrt{2})^k \left( 7 \sin \frac{3k\pi}{4} + \cos \frac{3k\pi}{4} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{15} (15k - 2) \right] \\
&= \frac{2}{25} \left\{ \frac{7z}{z^2 + 2z + 2} + \frac{z(z+1)}{z^2 + 2z + 2} \right\} \\
&\quad + \frac{15}{25} \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{2}{25} \frac{z}{z-1} \\
&= \frac{z}{25} \left\{ \frac{16 + 2z}{z^2 + 2z + 2} + \frac{-2z + 17}{(z-1)^2} \right\} \\
&= \frac{z(z^2 + 2)}{(z^2 + 2z + 2)(z-1)^2}
\end{aligned}$$



## § 11 用Z变换解不带右端 项的常系数线性差分方程

先考察一阶差分方程

$$x(kT+T) + ax(kT) = 0 \quad (11.1)$$

其中  $a$  为常数 (与  $k$  无关)。两端取  $z$  变换, 有

$$Z[x(kT+T)] + aZ[x(kT)] = 0 \quad (11.2)$$

写  $Z[x(kT)] = X(z)$ , 则由§5性质 (三) 的第二条, 有

$$Z[x(kT+T)] = z[X(z) - x(0)]$$

代入(11.2), 可得

$$z[X(z) - x(0)] + aX(z) = 0$$

由此解得

$$X(z) = x(0) \frac{z}{z+a}$$

按表36°, 即得  $x(kT) = x(0)(-a)^k$

$$\left( a = 0 \text{ 应有 } (-a)^k = \begin{cases} 1, & \text{在 } k=0 \\ 0, & \text{在 } k=1, 2, 3 \cdots \end{cases} \right)$$

由于  $x(0)$  可为任意值, 改写  $C = x(0)$  可得解

$$x(kT) = C(-a)^k$$

由  $C$  的任意性, 这包括原给方程的全部解。称此为所考察的一阶差分方程(11.1)的通解。

再看不带右端项的二阶常系数线性差分方程

$$x(kT+2T) + ax(kT+T) + bx(kT) = 0 \quad (11.3)$$

其中 $a$ 及 $b$ 为常数（与 $k$ 无关）。取 $z$ 变换，并用§5性质(三)的第二式，可有

$$\begin{aligned} & z^2[X(z) - x(0) - x(T)z^{-1}] + az[X(z) - x(0)] + bX(z) = 0 \\ & (z^2 + az + b)X(z) = x(0)z^2 + [x(T) + ax(0)]z \\ & X(z) = \frac{x(0)z^2 + [x(T) + ax(0)]z}{z^2 + az + b} \quad (11.3') \end{aligned}$$

(i) 设 $z^2 + az + b = 0$ 有两个不等根 $\alpha, \beta$ ，则可有

$$X(z) = \frac{x(0)z^2 + [x(T) + ax(0)]z}{(z - \alpha)(z - \beta)}$$

查续表38°，可得(11.3)的解：

$$x(kT) = \frac{x(0)(\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}) + [x(T) + ax(0)](\alpha^k - \beta^k)}{\alpha - \beta} \quad (11.4)$$

此为带初始条件 $x(0)$ 及 $x(T)$ 之解。(11.4)可写成

$$\begin{aligned} x(kT) = & \frac{x(T) + x(0)(\alpha + a)}{\alpha - \beta} \alpha^k \\ & - \frac{x(T) + x(0)(\beta + a)}{\alpha - \beta} \beta^k \end{aligned}$$

由于 $x(0)$ 及 $x(T)$ 可为任意值，且 $\alpha \neq \beta$ ，我们可改写

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{x(T) + x(0)(\alpha + a)}{\alpha - \beta} \\ C_2 &= - \frac{x(T) + x(0)(\beta + a)}{\alpha - \beta} \end{aligned}$$

从而得(11.3)的解，即 $x(kT + 2T) - (\alpha + \beta)x(kT + T) + \alpha\beta x(kT) = 0$ 之解为：

$$x(kT) = C_1 a^k + C_2 \beta^k \quad (11.5)$$

其中 $C_1$ 及 $C_2$ 为任意常数。由于此包括(11.3)的全部解，称(11.5)为(11.3)的通解。

$$\left( \text{如果 } \beta = 0, \text{ 须取 } \beta^k = \begin{cases} 1, & \text{在 } k = 0 \\ 0, & \text{在 } k = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \right)$$

(ii) 设 $z^2 + az + b = 0$ 二根为共轭复根：①

$$\alpha \pm j\beta = \rho(\cos\varphi \pm j\sin\varphi)$$

则 
$$X(z) = \frac{x(0)z^2 + [x(T) + ax(0)]z}{(z - \alpha)^2 + \beta^2}$$

查续表39°可得(11.3)的解，即

$$x(kT + 2T) - 2ax(kT + T) + (a^2 + \beta^2)x(kT) = 0$$

的解：

$$x(kT) = \frac{1}{\beta} \rho^k \{ x(0) \rho \sin(k+1)\varphi + [x(T) + ax(0)] \sin k\varphi \} \quad (11.6)$$

其中  $\rho = \sqrt{a^2 + \beta^2}$ ,  $\cos\varphi = a/\rho$ ,  $\sin\varphi = \beta/\rho$  此为带初始值 $x(0)$ 及 $x(T)$ 的解。显然，(11.6)可写成

$$x(kT) = \rho^k (C_1 \cos k\varphi + C_2 \sin k\varphi) \quad (11.7)$$

其中 $C_1$ 及 $C_2$ 为任意常数，此为通解。

(iii) 设 $z^2 + az + b = 0$ 有两等根 $\alpha, \alpha$ ，则

$$X(z) = \frac{x(0)z^2 + [x(T) + ax(0)]z}{(z - \alpha)^2}$$

查续表37°得(11.3)的解，即

$$x(kT + 2T) - 2ax(kT + T) + a^2x(kT) = 0$$

①不要把(ii)中的 $\alpha, \beta$ 和(i)中的 $\alpha, \beta$ 相混

的解:  $x(kT) = x(0)(k+1)a^k + [x(T) + ax(0)]k a^{k-1}$   
(11.8)

其中在  $a = 0$  时, 须取  $a^k = \begin{cases} 1, & \text{在 } k=0 \\ 0, & \text{在 } k=1, 2, 3, \dots \end{cases}$

又  $a = -2a$  解(11.8) 是带初始值  $x(0)$  及  $x(T)$  的解。显然(11.8)可写成

$$x(kT) = a^k(C_1 + C_2 k) \quad (11.9)$$

而  $C_1$  及  $C_2$  与  $K$  无关, 此为通解。

带有初始值  $x(0)$ ,  $x(T)$  的解: (11.4), (11.6), (11.8) 形式较繁, 不必作为公式强记, 可用  $z$  变换解得。至于通解(11.5), (11.7), (11.9) 形式较简捷, 可按方程

$$r^2 + ar + b = 0$$

的根: (i)  $\alpha, \beta$ , (ii)  $\rho(\cos\varphi \pm j\sin\varphi)$ , (iii)  $\alpha, \alpha$ , 直接写出。这些通解的结构类似于微分方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + bx = 0$$

的通解的结构。

如果不用  $z$  变换, 则可用试验法先求(11.3)的通解, 然后再求具初始值  $x(0)$ ,  $x(T)$  的解。用试验法求通解要用到解的线性性质, 即: 如果  $x(kT)$  为(11.3)的解, 则  $Cx(kT)$  也是(11.3)的解 ( $C$  为常数); 又如果  $x_1(kT)$  及  $x_2(kT)$  均为(11.3)的解, 则  $(x_1 + x_2)(kT) \equiv x_1(kT) + x_2(kT)$  也是(11.3)的解。这两条性质证明较易, 留给读者自己去完成。所谓试验法乃是设(11.3)有如  $r^k$  形式的解,  $r$  为待定常数。以  $r^k$  代(11.3)的  $x(kT)$ , 可有  $r^{k+2} + ar^{k+1} + br^k = 0$ , 即

$$r^k(r^2 + ar + b) = 0$$

称  $r^2 + ar + b = 0$  (11.10)

为辅助方程。

若(11.10)有两不等根,  $\alpha \neq \beta$ , 则  $\alpha^k$  及  $\beta^k$  均为(11.3)的解 由解的线性性质, 可见

$$x(kT) = C_1 \alpha^k + C_2 \beta^k$$

为(11.3)的解。此与(11.5)相同, 即为通解。注意, 如果两根中有一根为 0, 例如  $\beta = 0$  (当然  $\alpha \neq 0$ ), 那末应

取  $\beta^k = \begin{cases} 1, & \text{在 } k = 0 \\ 0, & \text{在 } k = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$

若(11.10)有两共轭复根  $\rho e^{\pm i\varphi}$ , 则  $\rho^k e^{\pm i k \varphi}$  均为(11.3)的解, 故由解的线性性质, 可见

$$\frac{1}{2} \rho^k (e^{i k \varphi} + e^{-i k \varphi}) = \rho^k \cos k \varphi$$

及  $\frac{1}{2j} \rho^k (e^{i k \varphi} - e^{-i k \varphi}) = \rho^k \sin k \varphi$

均为(11.3)的解, 从而

$$x(kT) = \rho^k (C_1 \cos k \varphi + C_2 \sin k \varphi)$$

为(11.3)的解, 此与(11.7)同, 故为通解。

如果(11.10)有两等根  $\alpha, \alpha$ , 则  $\alpha^k$  及  $(\alpha + h)^k \big|_{h=0}$  为(11.3)的解, 由线性性质, 可见

$$\alpha \left. \frac{(\alpha + h)^k - \alpha^k}{h} \right|_{h=0} = k \alpha^k$$

为(11.3)的解, 故按线性性质, 可见

$$x(kT) = C_1 \alpha^k + C_2 k \alpha^k = \alpha^k (C_1 + C_2 k)$$

为(11.3)的解。此与(11.9)相同, 故为通解。但应注意在

$\alpha = 0$  时, 须取  $\alpha^k = \begin{cases} 1, & \text{在 } k = 0 \\ 0, & \text{在 } k = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$

有了通解，具有初始值  $x(0) = x_0$  及  $x(T) = x_1$  的解可由下法得出。即以  $k=0$ ,  $x(kT) = x_0$ ;  $k=1$ ,  $x(kT) = x_1$  两条条件分别代入通解，得两个以  $C_1$ 、 $C_2$  为未知数的一次方程，解出  $C_1$ 、 $C_2$  再代回通解，即得所要求的解。

最后讨论不带右端项的  $n$  阶常系数线性差分方程：

$$a_0 x(kT + nT) + a_1 x(kT + nT - T) + \cdots + a_{n-1} x(kT + T) + a_n x(kT) = 0 \quad (11.11)$$

我们兼用  $z$  变换及试验法解此方程。

施用  $z$  变换于(11.11)的各项，可有

$$\begin{aligned} & a_0 z^n \{ X(z) - x(0) - x(T)z^{-1} - \cdots - x(nT - T)z^{-n+1} \} \\ & + a_1 z^{n-1} \{ X(z) - x(0) - x(T)z^{-1} - \cdots - x(nT - 2T)z^{-n+2} \} \\ & + \cdots \\ & + a_{n-2} z^2 \{ X(z) - x(0) - x(T)z^{-1} \} \\ & + a_{n-1} z \{ X(z) - x(0) \} + a_n X(z) = 0 \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} & (a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n) X(z) \\ & = b_1 z^n + b_2 z^{n-1} + \cdots + b_n z, \\ & X(z) = \frac{b_1 z^n + b_2 z^{n-1} + \cdots + b_n z}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n} \quad (11.12) \end{aligned}$$

其中  $b_1 = a_0 x(0)$

$$b_2 = a_0 x(T) + a_1 x(0)$$

$$b_3 = a_0 x(2T) + a_1 x(T) + a_2 x(0)$$

.....

$$b_{n-1} = a_0 x(nT - 2T) + a_1 x(nT - 3T) + \cdots + a_{n-2} x(0)$$

$$b_n = a_0 x(nT - T) + a_1 x(nT - 2T) + \cdots + a_{n-1} x(0)$$

用留数法，或把  $X(z)/z$  分为部分分式然后查表，或把  $X(z)$  展为  $z^{-1}$  的幂级数，求出 (11.12) 的反  $z$  变换，即得具初始值  $x(0), x(T), \cdots, x(nT - T)$  的解。注意  $b_1, b_2, \cdots, b_n$  是  $x(0), x(T), \cdots, x(nT - T)$  的线性合并。

我们考虑一个特殊情形，即 (11.12) 分母的  $n$  个零点全不相等，设为  $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 。为简单起见，取  $a_0 = 1$ ，则

$$X(z) = \frac{b_1 z^n + b_2 z^{n-1} + \cdots + b_n z}{(z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_n)}$$

( $a_1, a_2, \cdots, a_n$  彼此不等)

分为部分分式，可有

$$X(z) = \frac{C_1 z}{z - a_1} + \frac{C_2 z}{z - a_2} + \cdots + \frac{C_n z}{z - a_n}$$

其中

$$C_1 = \frac{b_1 a_1^{n-1} + b_2 a_1^{n-2} + \cdots + b_n}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \cdots (a_1 - a_n)}$$

$$C_2 = \frac{b_1 a_2^{n-1} + b_2 a_2^{n-2} + \cdots + b_n}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \cdots (a_2 - a_n)}$$

.....

$$C_n = \frac{b_1 a_n^{n-1} + b_2 a_n^{n-2} + \cdots + b_n}{(a_n - a_1)(a_n - a_2) \cdots (a_n - a_{n-1})}$$

取  $X(z)$  的反  $z$  变换，可有解

$$x(kT) = C_1 a_1^k + C_2 a_2^k + \cdots + C_n a_n^k \quad (11.13)$$

注意：如果  $a_1, a_2, \cdots, a_n$  中有一个为 0，例如  $a_1 = 0$ （其他当然均不为 0），我们应取  $a_1^k = \begin{cases} 1, & \text{在 } k = 0 \\ 0, & \text{在 } k = 1, 2, 3, \cdots \end{cases}$

我们再考虑另一个特殊情形，即 (11.12) 分母的  $n$  个根全

相等为  $a$ 。仍取  $a_0 = 1$ , 则

$$X(z) = \frac{b_1 z^n + b_2 z^{n-1} + \cdots + b_n z}{(z - a)^n}$$

所求之解为

$$x(kT) = \operatorname{res}_a \{ z^{k-1} X(z) \}$$

$$= \operatorname{res}_a \frac{b_1 z^{k+n-1} + b_2 z^{k+n-2} + \cdots + b_n z^k}{(z - a)^n}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \left[ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (b_1 z^{k+n-1} + b_2 z^{k+n-2} + \cdots + b_n z^k) \right]_{z=a}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \{ b_1 (k+n-1)(k+n-2)\cdots(k+1)a^k \\ + b_2 (k+n-2)(k+n-3)\cdots k a^{k-1} \\ + \cdots \\ + b_n k(k-1)\cdots(k-n+2)a^{k-n+1} \}$$

花括号中每项均有  $(n-1)$  个  $k$  的一次式因子, 作出这些乘积, 并按  $k$  的升幂排列, 并假定  $a \neq 0$ , 可见上式能化成下列形式

$$x(kT) = a^k (C_1 + C_2 k + \cdots + C_n k^{n-1}) \quad (11.14)$$

其中  $C_1, C_2, \cdots, C_n$  与  $k$  无关, 它们是  $b_1, b_2, \cdots, b_n$  的线性合并, 因而是  $x(0), x(T), \cdots, x(nT-T)$  的线性合并。(11.14) 即为所求之解。不要把(11.14) 中的  $C_1, \cdots, C_n$  和(11.13) 中的  $C_1, \cdots, C_n$  相混淆。注意(11.13) 及(11.14) 既是具有初始值  $x(0), x(T), \cdots, x(nT-T)$  的解, 也是通解。

如果  $a = 0$ , 则原差分方程成为  $x(kT + nT) = 0$ , 并且



$$X(z) = \frac{b_1 z^n + b_2 z^{n-1} + \cdots + b_n z}{z^n}$$

$$= b_1 + \frac{b_2}{z} + \frac{b_3}{z^2} + \cdots + \frac{b_n}{z^{n-1}}$$

故  $x(kT) = Z^{-1}[X(z)]$

$= X(z)$  的负幂级数展式中  $z^{-k}$  的系数

$$= \begin{cases} b_1, & \text{在 } k=0 \\ b_2, & \text{在 } k=1 \\ b_3, & \text{在 } k=2 \\ \dots\dots\dots \\ b_n, & \text{在 } k=n-1 \\ 0, & \text{在 } k \geq n \end{cases}$$

此  $x(kT)$  即为  $x(kT + nT) = 0$  的解。注意在此特殊情形下， $b_1, b_2, \dots, b_n$  分别化为  $x(0), x(T), \dots, x(nT - T)$ 。

为了得出(11.11)的通解，用试验法更方便。设(11.11)有如  $r^k$  形式之解， $r$  为常数。以  $r^k$  代(11.11)中的  $x(kT)$ ，从而以  $r^{k+1}, \dots, r^{k+n}$  分别代(11.11)中的  $x(kT + T), \dots, x(kT + nT)$ ，消去  $r^k$ ，可得

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0 \quad (11.15)$$

称此为辅助方程。对于(11.15)的一个单根  $\alpha$ ，可有(11.11)

的解  $C_1 \alpha^k$ 。若  $\alpha = 0$ ，则应有  $\alpha^k = \begin{cases} 1, & \text{在 } k=0 \\ 0, & \text{在 } k \geq 1 \end{cases}$

对于(11.15)的一对不重复的共轭复根  $\rho e^{\pm j\varphi}$ ，可有(11.11)的解： $\rho^k (C_1 \cos k\varphi + C_2 \sin k\varphi)$ 。

对于(11.15)的二重根  $\alpha, \alpha$ ，除  $C_1 \alpha^k$  为(11.11)的解外， $\{\alpha[(\alpha + h)^k - \alpha^k]/h\} |_{h=0} = k \alpha^k$  亦应为(11.11)的解，从而

(11.11)必有解 $a^k(C_1 + C_2 k)$ 。

对于(11.15)的三重根 $a, a, a$ , 除 $a^k, k a^k$ 为(11.11)的解外, 我们还能证 $k^2 a^k$ 也是(11.11)的解。事实上, 把第一、第二两 $a$ 当作二重根, 我们有解 $k a^k$ , 而把第一、第三两 $a$ 作为二重根, 我们应有解 $k(a+h)^k$  (其中 $h=0$ ), 故在 $a$ 为三重根的情况下, 我们应有(11.11)的解

$$a \frac{k(a+h)^k - k a^k}{h} \Big|_{h=0} = k^2 a^k$$

所以在 $a$ 为三重根时, (11.11)有解 $a^k(C_1 + C_2 k + C_3 k^2)$ 。依此下推, ..., 结果与(11.14)一致。

若(11.15)有一对二重共轭复根 $\rho e^{\pm i\varphi}, \rho e^{\pm i\varphi}$ , 则

$$\rho^k [(C_1 + C_2 k) \cos k\varphi + (C_3 + C_4 k) \sin k\varphi]$$

为(11.11)的解。

把相应于(11.15)的各不同根的解加起来, 即得通解 (共有 $n$ 个任意常数)。

有了通解, 满足初始条件

$$x(0) = x_0, x(T) = x_1, x(2T) = x_2, \dots, x(nT - T) = x_{n-1}$$

的特解可由下法得出。即把此条件代入通解中, 我们可有一组 $n$ 个以 $n$ 个任意常数为未知数的一次方程, 解出这些常数, 再代回通解, 即得所要求的特解。

下面我们举几个数字例子。

$$\text{例1. } x(kT + 2T) + 3x(kT + T) + 2x(kT) = 0$$

$$x(0) = 1 \quad x(T) = 2$$

求特解。

解 运用 $z$ 变换于原给方程的每一项, 可有

$$Z[x(kT + 2T)] + 3Z[x(kT + T)] + 2Z[x(kT)] = 0$$

$$\text{即 } z^2[X(z) - 1 - 2z^{-1}] + 3z[X(z) - 1] + 2X(z) = 0$$

由此得

$$X(z) = \frac{z^2 + 5z}{z^2 + 3z + 2} = \frac{z^2 + 5z}{(z+1)(z+2)}$$

查续表38°得反 $z$ 变换

$$\begin{aligned} x(kT) &= (-1)^{k+1} - (-2)^{k+1} + 5(-1)^k - 5(-2)^k \\ &= 4(-1)^k - 3(-2)^k \quad \text{即为所要求的解。} \end{aligned}$$

另解。辅助方程为 $r^2 + 3r + 2 = 0$ , 两根为 $-1, -2$ , 故通解为

$$x(kT) = C_1(-1)^k + C_2(-2)^k$$

$$x(0) = 1 \quad \text{则} \quad 1 = C_1 + C_2$$

$$x(T) = 2 \quad \text{则} \quad 2 = -C_1 - 2C_2$$

由此解得 $C_1 = 4, C_2 = -3$ , 所求特解为

$$x(kT) = 4(-1)^k - 3(-2)^k \quad \text{同上。}$$

$$\text{例2. } x(kT + 2T) + 4x(kT + T) + 4x(kT) = 0$$

$$x(0) = 1 \quad x(T) = 2 \quad \text{求特解}$$

解 取 $z$ 变换, 可有

$$z^2[X(z) - 1 - 2z^{-1}] + 4z[X(z) - 1] + 4X(z) = 0$$

$$\text{即 } (z^2 + 4z + 4)X(z) = z^2 + 6z$$

$$\text{于是 } X(z) = \frac{z^2 + 6z}{(z+2)^2}$$

$$\text{查续表37°}, x(kT) = (k+1)(-2)^k + 6k(-2)^{k-1}$$

$$\text{即 } x(kT) = (-2)^k(-2k+1) \quad \text{即为所求。}$$

另解, 辅助方程为 $r^2 + 4r + 4 = 0$ , 两根相等为 $-2, -2$  故通解为 $x(kT) = (-2)^k(C_1 + C_2 k)$ 。以 $x(0) = 1, x(T) = 2$ 代入之, 可有 $1 = C_1, 2 = -2(C_1 + C_2)$ , 由此解出 $C_1 = 1, C_2 = -2$ , 特解为 $x(kT) = (-2)^k(1 - 2k)$

例3.  $x(kT + 2T) + 4x(kT + T) + 5x(kT) = 0$

$x(0) = 1, x(T) = 2$ , 求特解。

解 取  $z$  变换, 可有

$$z^2[X(z) - 1 - 2z^{-1}] + 4z[X(z) - 1] + 5X(z) = 0$$

$$X(z) = \frac{z^2 + 6z}{z^2 + 4z + 5} = \frac{z^2 + 6z}{(z + 2)^2 + 1}$$

查续表39°,  $x(kT) = (\sqrt{5})^k [\sqrt{5} \sin(k+1)\varphi + 6\sin k\varphi]$

其中  $\cos\varphi = -2/\sqrt{5}$ ,  $\sin\varphi = 1/\sqrt{5}$ ,  $\varphi = \pi - \arctg(1/2)$

上式易化成

$$x(kT) = (\sqrt{5})^k \left\{ \sqrt{5} \left[ \sin k\varphi \left( -\frac{2}{\sqrt{5}} \right) + \cos k\varphi \left( \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \right] + 6\sin k\varphi \right\} = (\sqrt{5})^k (\cos k\varphi + 4\sin k\varphi)$$

即为所求。

另解 辅助方程为  $r^2 + 4r + 5 = 0$ , 两根为  $-2 \pm j = \sqrt{5} (\cos\varphi \pm j\sin\varphi)$

其中  $\cos\varphi = -2/\sqrt{5}$ ,  $\sin\varphi = 1/\sqrt{5}$ ,  $\varphi = \pi - \arctg(1/2)$

通解为  $x(kT) = (\sqrt{5})^k (C_1 \cos k\varphi + C_2 \sin k\varphi)$

$x(0) = 1$ , 则  $1 = C_1$

$x(T) = 2$ , 则  $2 = \sqrt{5} \left( -\frac{2}{\sqrt{5}} C_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} C_2 \right)$

于是  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = 4$  特解为

$$x(kT) = (\sqrt{5})^k (\cos k\varphi + 4\sin k\varphi)$$

例4.  $x(kT + 4T) + 4x(kT + 3T) + 6x(kT + 2T)$

$+ 4x(kT + T) + x(kT) = 0$  求通解。

解 辅相方程为  $r^4 + 4r^3 + 6r^2 + 4r + 1 = 0$  即  $(r + 1)^4 = 0$ , 四根相等为  $-1, -1, -1, -1$  通解为

$$x(kT) = (-1)^k (C_1 + C_2 k + C_3 k^2 + C_4 k^3)$$

用  $z$  变换, 须查续表44°。

例5.  $x(kT + 3T) + x(kT + 2T) + x(kT + T) + x(kT) = 0$

$x(0) = 1, x(T) = 2, x(2T) = 3$  求特解

解 取  $z$  变换, 可有

$$z^3[X(z) - 1 - 2z^{-1} - 3z^{-2}]$$

$$+ z^2[X(z) - 1 - 2z^{-1}]$$

$$+ z[X(z) - 1] + X(z) = 0$$

$$(z^3 + z^2 + z + 1)X(z) = z^3 + 3z^2 + 6z$$

$$X(z) = \frac{z^3 + 3z^2 + 6z}{(z^2 + 1)(z + 1)}$$

查续表43°,

$$\begin{aligned} x(kT) &= \frac{1}{2} \left\{ \sin\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + 3\sin\frac{k\pi}{2} \right. \\ &\quad \left. + 6\sin\left(\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \sin\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{2\pi}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. + 3\sin\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + 6\sin\frac{k\pi}{2} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2}(-1)^k(1 - 3 + 6) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \cos\frac{k\pi}{2} + 3\sin\frac{k\pi}{2} - 6\cos\frac{k\pi}{2} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \left\{ -\sin \frac{k\pi}{2} + 3\cos \frac{k\pi}{2} + 6\sin \frac{k\pi}{2} \right\} \\
& + 2(-1)^k \\
& = 2(-1)^k + 4\sin \frac{k\pi}{2} - \cos \frac{k\pi}{2} \quad \text{即为所求。}
\end{aligned}$$

另解 辅助方程为  $r^3 + r^2 + r + 1 = 0$ , 即

$$(r+1)(r^2+1)=0, \text{ 三根为 } -1, \pm j = \cos \frac{\pi}{2} \pm j \sin \frac{\pi}{2}$$

通解为

$$x(kT) = C_1(-1)^k + C_2 \cos \frac{k\pi}{2} + C_3 \sin \frac{k\pi}{2}$$

求特解。

$$x(0) = 1 \quad \text{则} \quad 1 = C_1 + C_2$$

$$x(T) = 2 \quad \text{则} \quad 2 = -C_1 + C_3$$

$$x(2T) = 3 \quad \text{则} \quad 3 = C_1 - C_2$$

由此解得  $C_1 = 2, C_2 = -1, C_3 = 4$  特解为

$$x(kT) = 2(-1)^k - \cos \frac{k\pi}{2} + 4\sin \frac{k\pi}{2}$$

例6.  $x(kT+3T) + x(kT) = 0$

$$x(0) = 1, x(T) = 2, x(2T) = 3 \quad \text{求特解。}$$

解 取  $z$  变换, 可有

$$z^3[X(z) - 1 - 2z^{-1} - 3z^{-2}] + X(z) = 0$$

$$X(z) = \frac{z^3 + 2z^2 + 3z}{z^3 + 1} = \frac{z^3 + 2z^2 + 3z}{(z+1)(z^2 - z + 1)}$$

查续表43°, 可有

$$\begin{aligned}
x(kT) &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3} \left[ \sin\left(\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) + 2\sin\frac{k\pi}{3} \right. \\
&\quad \left. + 3\sin\left(\frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) \right] \\
&\quad + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3} \left[ \sin\left(\frac{k\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) \right. \\
&\quad \left. + 2\sin\left(\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) + 3\sin\frac{k\pi}{3} \right] \\
&\quad + \frac{1}{3}(-1)^k(1-2+3) \\
&= \frac{2}{3\sqrt{3}} \left[ \frac{1}{2}\sin\frac{k\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{k\pi}{3} \right. \\
&\quad \left. + 2\sin\frac{k\pi}{3} + 3\left(\frac{1}{2}\sin\frac{k\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{k\pi}{3}\right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}\sin\frac{k\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{k\pi}{3} \right. \\
&\quad \left. + 2\left(\frac{1}{2}\sin\frac{k\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{k\pi}{3}\right) + 3\sin\frac{k\pi}{3} \right] \\
&\quad + \frac{2}{3}(-1)^k \\
&= \frac{2}{3\sqrt{3}} \left( \frac{15}{2}\sin\frac{k\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{k\pi}{3} \right) \\
&\quad + \frac{2}{3}(-1)^k \\
&= \frac{5}{\sqrt{3}}\sin\frac{k\pi}{3} + \frac{1}{3}\cos\frac{k\pi}{3} + \frac{2}{3}(-1)^k
\end{aligned}$$

另解. 辅助方程为  $r^3 + 1 = 0$ , 即

$$(r + 1)(r^2 - r + 1) = 0$$

三根为  $\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \pm j\sin\frac{\pi}{3}$ ,  $-1$

通解为  $x(kT) = C_1(-1)^k + C_2\cos\frac{k\pi}{3} + C_3\sin\frac{k\pi}{3}$

$x(0) = 1$ , 则  $1 = C_1 + C_2$

$x(T) = 2$ , 则  $2 = -C_1 + \frac{1}{2}C_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_3$

$x(2T) = 3$ , 则  $3 = C_1 - \frac{1}{2}C_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_3$

由此解出  $C_1 = \frac{2}{3}$ ,  $C_2 = \frac{1}{3}$ ,  $C_3 = \frac{5}{\sqrt{3}}$

特解为  $x(kT) = \frac{2}{3}(-1)^k + \frac{1}{3}\cos\frac{k\pi}{3} + \frac{5}{\sqrt{3}}\sin\frac{k\pi}{3}$

例7  $x(kT + 3T) - 2x(kT + 2T) - 4x(kT + T) + 8x(kT) = 0$

$x(0) = 1, x(T) = -1, x(2T) = 2$  求特解。

解 取  $z$  变换, 有

$$z^3[X(z) - 1 + z^{-1} - 2z^{-2}] - 2z^2[X(z) - 1 + z^{-1}] - 4z[X(z) - 1] + 8X(z) = 0$$

即  $(z^3 - 2z^2 - 4z + 8)X(z) = z^3 - 3z^2$

$$X(z) = \frac{z^3 - 3z^2}{z^3 - 2z^2 - 4z + 8} = \frac{z^3 - 3z^2}{(z - 2)^2(z + 2)}$$

查续表41°, 可得



$$\begin{aligned}
x(kT) &= \frac{1}{4}[(k+2)2^{k+1} - 3(k+1)2^k] \\
&\quad - \frac{1}{16}\{[2^{k+2} - (-2)^{k+2}] - 3[2^{k+1} \\
&\quad - (-2)^{k+1}]\} \\
&= \frac{1}{4}(-k \cdot 2^k + 2^k) - \frac{1}{16}\{-2 \times 2^k - 10(-2)^k\} \\
&= -\frac{1}{4}k \cdot 2^k + \frac{3}{8} \cdot 2^k + \frac{5}{8}(-2)^k
\end{aligned}$$

另解 辅助方程为

$$r^3 - 2r^2 - 4r + 8 = 0$$

即  $(r-2)^2(r+2) = 0$

三根为2, 2, -2 通解为

$$x(kT) = C_1(-2)^k + 2^k(C_2 + C_3k)$$

$$x(0) = 1 \quad \text{则} \quad 1 = C_1 + C_2$$

$$x(T) = -1 \quad \text{则} \quad -1 = -2C_1 + 2C_2 + 2C_3$$

$$x(2T) = 2 \quad \text{则} \quad 2 = 4C_1 + 4C_2 + 8C_3$$

$$\text{由此解出} \quad C_1 = \frac{5}{8}, \quad C_2 = \frac{3}{8}, \quad C_3 = -\frac{1}{4}$$

$$\text{特解为} \quad x(kT) = \frac{5}{8}(-2)^k + \frac{3}{8}2^k - \frac{1}{4}k \cdot 2^k$$

$$\begin{aligned}
\text{例 8. } &x(kT + 4T) + x(kT + 3T) + x(kT + T) \\
&+ x(kT) = 0
\end{aligned}$$

$x(0) = 1, \quad x(T) = 2, \quad x(2T) = -1, \quad x(3T) = 3,$  求特解。

解 取  $z$  变换, 可有

$$\begin{aligned} & Z^4 [X(z) - 1 - 2z^{-1} + z^{-2} - 3z^{-3}] \\ & + z^3 [X(z) - 1 - 2z^{-1} + z^{-2}] \\ & + z [X(z) - 1] + X(z) = 0 \end{aligned}$$

即  $(z^4 + z^3 + z + 1) X(z) = z^4 + 3z^3 + z^2 + 3z$

由此得

$$X(z) = \frac{z^4 + 3z^3 + z^2 + 3z}{z^4 + z^3 + z + 1} = \frac{z^4 + 3z^3 + z^2 + 3z}{(z^2 - z + 1)(z + 1)^2}$$

查续表50°,  $a = 1, b = 3, c = 1, d = 3, \alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{\sqrt{3}}{2},$

$\gamma = -1, \rho = 1, \varphi = \pi/3, (\gamma - \alpha)^2 + \beta^2 = 3,$

$$\begin{aligned} x(kT) = & \frac{2}{9\sqrt{3}} \left[ \sin\left(\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) + 3\sin\frac{k\pi}{3} \right. \\ & \left. + \sin\left(\frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) + 3\sin\left(\frac{k\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right) \right] \\ & + \frac{4}{9\sqrt{3}} \left[ \sin\left(\frac{k\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + 3\sin\left(\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \right. \\ & \left. + \sin\frac{k\pi}{3} + 3\sin\left(\frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) \right] \\ & + \frac{2}{9\sqrt{3}} \left[ \sin\left(\frac{k\pi}{3} + \pi\right) + 3\sin\left(\frac{k\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) \right. \\ & \left. + \sin\left(\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) + 3\sin\frac{k\pi}{3} \right] \\ & + \frac{1}{3}(-1)^k [(k+3) - 3(k+2) + (k+1) - 3k] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{9} (-1)^k [-1 + 3 - 1 + 3] \\
& = \frac{7}{3\sqrt{3}} \sin \frac{k\pi}{3} + \frac{1}{3} \cos \frac{k\pi}{3} \\
& \quad + \frac{1}{3} (-1)^k (2 - 4k)
\end{aligned}$$

即为所求。化简时用到两角和差的正弦公式。

另解，辅助方程为  $r^4 + r^3 + r + 1 = 0$

即  $(r^3 + 1)(r + 1) = 0$ ，亦即  $(r^2 - r + 1)(r + 1)^2 = 0$

四根为  $\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \pm j\sin \frac{\pi}{3}$ ， $-1$ ， $-1$

$$\begin{aligned}
\text{故通解为 } x(kT) &= (-1)^k (C_1 + C_2 k) + C_3 \cos \frac{k\pi}{3} \\
&+ C_4 \sin \frac{k\pi}{3}
\end{aligned}$$

$$x(0) = 1 \quad \text{则} \quad 1 = C_1 + C_3$$

$$x(T) = 2 \quad \text{则} \quad 2 = -C_1 - C_2 + \frac{1}{2}C_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_4$$

$$x(2T) = -1 \quad \text{则} \quad -1 = C_1 + 2C_2 - \frac{1}{2}C_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_4$$

$$x(3T) = 3 \quad \text{则} \quad 3 = -C_1 - 3C_2 - C_3$$

$$\text{由此解得 } C_1 = \frac{2}{3}, C_2 = -\frac{4}{3}, C_3 = \frac{1}{3}, C_4 = \frac{7}{3\sqrt{3}},$$

$$\begin{aligned}
\text{特解为 } x(kT) &= (-1)^k \left( \frac{2}{3} - \frac{4}{3}k \right) + \frac{1}{3} \cos \frac{k\pi}{3} \\
&+ \frac{7}{3\sqrt{3}} \sin \frac{k\pi}{3}
\end{aligned}$$

## § 12 带右端项的一阶常系数 线性差分方程的解

我们先解一阶方程

$$x(kT + T) + ax(kT) = f(kT) \quad (12.1)$$

其中  $a$  为常数 (对  $k$  来说),  $f(kT)$  为已知数列。

取  $z$  变换并利用 §5 性质 (三) 的第二式, 有

$$z[X(z) - x(0)] + aX(z) = F(z) \quad (12.2)$$

其中  $X(z) = Z[x(kT)]$   $F(z) = Z[f(kT)]$

现 (12.2) 可化成

$$(z + a)X(z) = zx(0) + F(z)$$

$$\text{由此得 } X(z) = x(0) \frac{z}{z + a} + \frac{1}{z + a} F(z) \quad (12.3)$$

由表 2°,  $\frac{z}{z + a} = Z[(-a)^k]$ , 又

$$\begin{aligned} \frac{1}{z + a} &= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 + az^{-1}} = \frac{1}{z} (1 - az^{-1} + a^2z^{-2} - \dots \\ &\quad + (-a)^{k-1}z^{-k+1} + \dots) \\ &= z^{-1} - az^{-2} + a^2z^{-3} - \dots + (-a)^{k-1}z^{-k} + \dots \end{aligned}$$

故

$$Z^{-1} \left[ \frac{1}{z + a} \right] = \begin{cases} (-a)^{k-1}, & \text{在 } k \geq 1 \\ 0, & \text{在 } k = 0 \end{cases}$$

$$\text{于是写 } \varphi(kT) = \begin{cases} (-a)^{k-1}, & \text{在 } k \geq 1 \\ 0, & \text{在 } k = 0 \end{cases} \quad (12.4)$$

则  $\frac{1}{z+a} = Z[\varphi(kT)]$

注意：这结果也可直接从  $\frac{z}{z+a} = Z[(-a)^k]$  并应用 §5 性质

(三) 的第一式得出 ( $n=1$ )。

于是 (12.3) 可写成

$$X(z) = x(0)Z[(-a)^k] + Z[\varphi(kT)]Z[f(kT)] \quad (12.5)$$

根据 §5 性质 (五) 有

$$\begin{aligned} Z[\varphi(kT)]Z[f(kT)] &= Z[(\varphi * f)(kT)] \\ &= Z[\varphi(0)f(kT) + \varphi(T)f(kT-T) + \varphi(2T)f(kT-2T) \\ &\quad + \cdots + \varphi(kT)f(0)] \\ &= Z[f(kT-T) - a f(kT-2T) + \cdots + (-a)^{k-1} f(0)] \end{aligned}$$

代入 (12.5) 然后取反  $z$  变换，可得

$$x(kT) = x(0)(-a)^k + \{f(0)(-a)^{k-1} + f(T)(-a)^{k-2} + \cdots - a f(kT-2T) + f(kT-T)\} \quad (12.6)$$

这就是所要求的解。根据  $x(0)$  的任意性，(12.6) 就是 (12.1) 的通解。(12.6) 右端第一项  $x(0)(-a)^k$  是不带右端项的方程

$$x(kT+T) + a x(kT) = 0 \quad (12.7)$$

的通解，也称方程 (12.1) 的补函数。(12.6) 右端括号中之式是 (12.1) 的一个特解，即

$$\text{通解} = \text{补函数} + \text{特解}$$

这对带右端项的高阶差分方程也成立。

方程 (12.1) 的解 (12.6) 也可由递推法得出如下

用递推法求补函数即求不带右端项的方程 (12.7) 的通解

在§2中已有例示，这里不再重复。我们来用递推法求(12.1)的特解。于(12.1)中令 $k=0$ ，可有

$$x(T) + ax(0) = f(0)$$

即是所求特解。为简单起见，取 $x(0) = 0$ ，从而 $x(T) = f(0)$

$$\text{于(12.1)中取 } k=1, \text{ 有 } x(2T) + ax(T) = f(T)$$

$$\text{从而 } x(2T) = (-a)f(0) + f(T)$$

$$\text{再于(12.1)中令 } k=2, \text{ 有 } x(3T) + ax(2T) = f(2T)$$

$$\text{从而 } x(3T) = (-a)^2 f(0) + (-a)f(T) + f(2T)$$

依此下推，我们可归纳得

$$\begin{aligned} x(kT) &= (-a)^{k-1} f(0) + (-a)^{k-2} f(T) + \cdots \\ &\quad + (-a)f(kT-2T) + f(kT-T) \end{aligned}$$

现由(12.1)有

$$x(kT+T) = (-a)x(kT) + f(kT)$$

把所归纳出的 $x(kT)$ 代入之，有

$$\begin{aligned} x(kT+T) &= (-a)^k f(0) + (-a)^{k-1} f(T) + \cdots + \\ &\quad (-a)f(kT-T) + f(kT) \end{aligned}$$

这和上面所归纳出的 $x(kT)$ 形式相同，以 $k+1$ 代 $k$ ，归纳法即告完成。

在上面，我们用§5性质（五）得出乘积 $\frac{1}{z+a} F(z)$ 的反 $z$ 变换。但对于具体的函数 $F(z)$ 亦可查表或用留数法或用负幂级数法直接求 $F(z)/(z+a)$ 的反 $z$ 变换以得特解。

我们举几个例子

例1.  $x(kT+T) + ax(kT) = b$ ,  $a$ 及 $b$ 均为常数。

解 这里 $f(kT) = b$ ，代入(12.6)得解

$$x(kT) = x(0)(-a)^k + b\{(-a)^{k-1} + (-a)^{k-2} + \cdots + (-a) + 1\}$$

若  $a \neq -1$ , 则此可化成

$$\begin{aligned} x(kT) &= x(0)(-a)^k + b \frac{1 - (-a)^k}{1 + a} \\ &= \left\{ x(0) - \frac{b}{1 + a} \right\} (-a)^k + \frac{b}{1 + a} \\ &= C(-a)^k + \frac{b}{1 + a} \end{aligned} \quad (12.8)$$

其中  $C = x(0) - b/(1 + a)$  若  $a = -1$  则有

$$x(kT) = x(0) + bk \quad (12.9)$$

如果不用(12.6)而直接按原方程取  $z$  变换, 并注意  $Z[b] = bz/(z - 1)$  则(12.3)成为

$$X(z) = x(0) \frac{z}{z + a} + \frac{bz}{(z - 1)(z + a)}$$

若  $a \neq -1$ , 则查续表36°及38°, 取反  $z$  变换, 可得解

$$\begin{aligned} x(kT) &= x(0)(-a)^k + \frac{b[1 - (-a)^k]}{1 + a} \\ &= C(-a)^k + \frac{b}{1 + a} \end{aligned}$$

结果与(12.8)相同。

若  $a = -1$ , 则  $X(z) = x(0) \frac{z}{z - 1} + \frac{bz}{(z - 1)^2}$

查续表36°, 37°, 得  $x(kT) = x(0) + bk$ ,

结果与(12.9)相同。

我们看到, 后面的方法有一个优点, 就是不需要把一个

级数的  $k$  项之和化为封闭式。

例 2 .  $x(kT + T) + ax(kT) = kT$

解 这里  $f(kT) = kT$  代入(12.6)得解

$$x(kT) = x(0)(-a)^k + T\{(-a)^{k-2} + 2(-a)^{k-3} + \dots + (k-2)(-a) + (k-1)\} \quad (12.10)$$

我们按  $a \neq -1$  及  $a = -1$  两种情形把(12.10)右端花括号中的式子变为封闭式。若  $a \neq -1$ , 则写

$$S = (k-1) + (k-2)(-a) + \dots + 2(-a)^{k-3} + (-a)^{k-2}$$

于是

$$(-a)S = (k-1)(-a) + \dots + 3(-a)^{k-3} + 2(-a)^{k-2} + (-a)^{k-1}$$

两式按同幂项相减得

$$\begin{aligned} (1+a)S &= k-1 - (-a) - \dots - (-a)^{k-3} \\ &\quad - (-a)^{k-2} - (-a)^{k-1} \\ &= k - \frac{1 - (-a)^k}{1+a} \end{aligned}$$

$$S = \frac{k}{1+a} - \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{(-a)^k}{(1+a)^2}$$

代入(12.10)得通解

$$x(kT) = C(-a)^k + \frac{Tk}{1+a} - \frac{T}{(1+a)^2} \quad (12.10)'$$

其中  $C = x(0) + T/(1+a)^2$

若  $a = -1$ , 则(12.10)成为

$$\begin{aligned} x(kT) &= x(0) + T\{1 + 2 + \dots + (k-2) + (k-1)\} \\ &= x(0) + Tk(k-1)/2 \end{aligned}$$

此为  $x(kT + T) - x(kT) = kT$  的解



另解 施用  $z$  变换于所给方程, 注意

$$Z[kT] = Tz/(z-1)^2$$

则(12.3)此时成为

$$X(z) = x(0) \frac{z}{z+a} + T \frac{z}{(z-1)^2(z+a)} \quad (12.11)$$

若  $a \neq -1$ , 则查续表41°可有

$$Z^{-1} \left[ \frac{z}{(z-1)^2(z+a)} \right] = \frac{k}{1+a} - \frac{1-(-a)^k}{(1+a)^2} \quad (12.12)$$

按(12.11)取反  $z$  变换并利用(12.12)即得解如上之(12.10)'. 注意这里的(12.12)恰好是上面的和  $S$ 。因此, 这里不需要繁杂的求和工作。

若  $a = -1$ , 则(12.11)成为

$$X(z) = x(0) \frac{z}{z-1} + T \frac{z}{(z-1)^3} \quad (12.13)$$

查续表40°得  $x(kT+T) - x(kT) = kT$  的解

$$x(kT) = x(0) + Tk(k-1)/2$$

例3.  $x(kT+T) + ax(kT) = (kT)^2$

解 这里  $f(kT) = (kT)^2$ , 代入(12.6) 得解

$$x(kT) = x(0)(-a)^k + T^2 \{ (-a)^{k-2} + 4(-a)^{k-3} + \dots + (k-2)^2(-a) + (k-1)^2 \} \quad (12.14)$$

我们把花括号中之式化成封闭形。设

$$S = (k-1)^2 + (k-2)^2x + (k-3)^2x^2 + \dots + 1^2x^{k-2} \quad (x = -a)$$

$$\text{则 } xS = (k-1)^2x + (k-2)^2x^2 + \dots + 2^2x^{k-2} + x^{k-1}$$

两式按同幂项相减, 可有

$$(1-x)S = (k-1)^2 - (2k-3)x - (2k-5)x^2 - \dots - 3x^{k-2} - x^{k-1}$$

再乘以 $x$ , 可有

$$x(1-x)S = (k-1)^2x - (2k-3)x^2 - \dots - 5x^{k-2} \\ - 3x^{k-1} - x^k$$

两式按同幂项相减, 可见在 $x \neq 1$ 时,

$$(1-x)^2S = (k-1)^2 - k^2x + 2x + 2x^2 + \dots + 2x^{k-1} + x^k \\ = (k-1)^2 - k^2x + \frac{2(x-x^k)}{1-x} + x^k$$

$$= k^2(1-x) - 2k + \frac{1+x}{1-x} - \frac{1+x}{1-x}x^k$$

$$\text{从而 } S = \frac{k^2}{1-x} - \frac{2k}{(1-x)^2} + \frac{1+x}{(1-x)^3} - \frac{1+x}{(1-x)^3}x^k \\ (x \neq 1)$$

换 $x$ 为 $-a$ , 可见在 $a \neq -1$ 时,

$$S = \frac{k^2}{1+a} - \frac{2k}{(1+a)^2} + \frac{1-a}{(1+a)^3} - \frac{1-a}{(1+a)^3}(-a)^k$$

代入(12.14)可有解

$$x(kT) = C(-a)^k + T^2 \left\{ \frac{k^2}{1+a} - \frac{2k}{(1+a)^2} + \frac{1-a}{(1+a)^3} \right\} \\ (12.15)$$

其中 $C = x(0) - [T^2(1-a)/(1+a)^3]$  且 $a \neq -1$

若 $a = -1$ , 则(12.14)成为

$$x(kT) = x(0) + T^2 \{1^2 + 2^2 + \dots + (k-2)^2 + (k-1)^2\} \\ = x(0) + T^2 k(k-1)(2k-1)/6 \quad (12.16)$$

此为  $x(kT+T) - x(kT) = (kT)^2$  的解。

另解, 运用 $z$ 变换于所给方程

$$x(kT+T) + ax(kT) = (kT)^2$$

并用表5°, 可有

$$z[X(z) - x(0)] + aX(z) = T^2(z^2 + z)/(z - 1)^3$$

于是

$$X(z) = x(0) \frac{z}{z + a} + T^2 \frac{z^2 + z}{(z - 1)^3(z + a)} \quad (12.17)$$

若  $a \neq -1$ , 查续表45°, 取反  $z$  变换得解

$$\begin{aligned} x(kT) &= x(0)(-a)^k + T^2 \left\{ \frac{(k+1)k + k(k-1)}{2(1+a)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(k+1) + k}{(1+a)^2} + \frac{[1 - (-a)^{k+1}] + [1 - (-a)^k]}{(1+a)^3} \right\} \\ &= x(0)(-a)^k + T^2 \left\{ \frac{k^2}{1+a} - \frac{2k}{(1+a)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-a}{(1+a)^3} + \frac{a-1}{(1+a)^3}(-a)^k \right\} \end{aligned}$$

末端花括号中之式就是上解中之和  $S$ 。因此, 这解法避免了化一个  $k-1$  项和化成封闭形的繁杂工作, 注意这结果与 (12.15) 同。

若  $a = -1$ , 则 (12.17) 成为

$$X(z) = x(0) \frac{z}{z-1} + T^2 \frac{z^2 + z}{(z-1)^4} \quad (12.18)$$

查续表36°, 44°, 按 (12.18) 取反  $z$  变换得方程

$$x(kT + T) - x(kT) = (kT)^2$$

的解

$$\begin{aligned} x(kT) &= x(0) + T^2 \{ (k+1)k(k-1) \\ &\quad + k(k-1)(k-2) \} / 6 \\ &= x(0) + T^2 k(k-1)(2k-1) / 6 \quad \text{同 (12.16)} \end{aligned}$$

例 4 .  $x(kT + T) + ax(kT) = \mu^k$

解.  $f(kT) = \mu^k$ , 代入(12.6)得解

$$x(kT) = x(0)(-a)^k + \{(-a)^{k-1} + \mu(-a)^{k-2} + \dots + \mu^{k-2}(-a) + \mu^{k-1}\} \quad (12.19)$$

若  $\mu \neq -a$ , 此解可化为

$$\begin{aligned} x(kT) &= x(0)(-a)^k + \frac{\mu^k - (-a)^k}{\mu + a} \\ &= C(-a)^k + \frac{\mu^k}{\mu + a} \end{aligned} \quad (12.20)$$

其中  $C = x(0) - [1/(\mu + a)]$

若  $\mu = -a$ , 则(12.19)成为

$$x(kT) = x(0)(-a)^k + k(-a)^{k-1} \quad (12.21)$$

此为  $x(kT + T) + ax(kT) = (-a)^k$  的解。

另解. 按原方程取  $z$  变换可有

$$z[X(z) - x(0)] + aX(z) = z/(z - \mu)$$

$$X(z) = x(0) \frac{z}{z + a} + \frac{z}{(z - \mu)(z + a)} \quad (12.22)$$

若  $\mu \neq -a$ , 查续表36°, 38°, 按(12.22)取反 $z$ 变换可得解

$$\begin{aligned} x(kT) &= x(0)(-a)^k + \frac{\mu^k - (-a)^k}{\mu + a} \\ &= \left\{ x(0) - \frac{1}{\mu + a} \right\} (-a)^k + \frac{\mu^k}{\mu + a} \end{aligned}$$

与(12.20)同。

若  $\mu = -a$ , 则(12.22)成为

$$X(z) = x(0) \frac{z}{z + a} + \frac{z}{(z + a)^2} \quad (12.23)$$

查续表37°, 就(12.23)取反 $z$ 变换得解

$$x(kT) = x(0)(-a)^k + k(-a)^{k-1} \text{ 如(12.21)}$$

$$\text{例 5. } x(kT+T) + ax(kT) = \cos(\omega kT) \quad (12.24)$$

$$y(kT+T) + ay(kT) = \sin(\omega kT) \quad (12.25)$$

解 令 $w = x + jy$ , 则(12.24) +  $j$ (12.25)给出

$$w(kT+T) + aw(kT) = e^{j\omega kT} \quad (12.26)$$

于(12.20)取 $\mu = e^{j\omega T}$ 得(12.26)的解:

$$w(kT) = \left( w(0) - \frac{1}{a + e^{j\omega T}} \right) (-a)^k + \frac{e^{j\omega kT}}{a + e^{j\omega T}}$$

以 $a + e^{-j\omega T}$ 乘分母及分子, 并注意

$$(a + e^{j\omega T})(a + e^{-j\omega T}) = a^2 + 2a\cos\omega T + 1$$

则上式化成

$$w(kT) = \left( w(0) - \frac{a + e^{-j\omega T}}{a^2 + 2a\cos\omega T + 1} \right) (-a)^k + \frac{ae^{j\omega kT} + e^{j\omega(k-1)T}}{a^2 + 2a\cos\omega T + 1}$$

分开实部及虚部即得(12.24)及(12.25)之解:

$$\begin{aligned} x(kT) &= \left( x(0) - \frac{a + \cos\omega T}{a^2 + 2a\cos\omega T + 1} \right) (-a)^k \\ &\quad + \frac{a\cos\omega kT + \cos\omega(k-1)T}{a^2 + 2a\cos\omega T + 1} \\ &= \left( x(0) - \frac{a + \cos\omega T}{a^2 + 2a\cos\omega T + 1} \right) (-a)^k \\ &\quad + \frac{(a + \cos\omega T)\cos\omega kT + \sin\omega T\sin\omega kT}{a^2 + 2a\cos\omega T + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(kT) &= \left( y(0) + \frac{\sin \omega T}{a^2 + 2a \cos \omega T + 1} \right) (-a)^k \\
&\quad + \frac{a \sin \omega kT + \sin \omega (k-1)T}{a^2 + 2a \cos \omega T + 1} \\
&= \left( y(0) + \frac{\sin \omega T}{a^2 + 2a \cos \omega T + 1} \right) (-a)^k \\
&\quad + \frac{(a + \cos \omega T) \sin \omega kT - \sin \omega T \cos \omega kT}{a^2 + 2a \cos \omega T + 1}
\end{aligned}$$

另解, 按(12.24)及(12.25)取  $z$  变换并利用表12°, 13° 得

$$z[X(z) - x(0)] + aX(z) = \frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$$

$$z[Y(z) - y(0)] + aY(z) = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$$

于是

$$X(z) = x(0) \frac{z}{z+a} + \frac{z(z - \cos \omega T)}{(z^2 - 2z \cos \omega T + 1)(z+a)} \quad (12.27)$$

$$Y(z) = y(0) \frac{z}{z+a} + \frac{z \sin \omega T}{(z^2 - 2z \cos \omega T + 1)(z+a)} \quad (12.28)$$

查续表43°, 可有

$$\begin{aligned}
&Z^{-1} \left[ \frac{z^2 - z \cos \omega T}{(z^2 - 2z \cos \omega T + 1)(z+a)} \right] \\
&= \frac{\sin(\omega kT) - \cos \omega T \sin[\omega(k-1)T]}{\sin \omega T (a^2 + 2a \cos \omega T + 1)} \\
&\quad + \frac{a \{ \sin[\omega(k+1)T] - \cos \omega T \sin(\omega kT) \}}{\sin \omega T (a^2 + 2a \cos \omega T + 1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(-a)^k(-a - \cos \omega T)}{a^2 + 2a \cos \omega T + 1} \\
& = \frac{(a + \cos \omega T) \cos(\omega k T) + \sin \omega T \sin(\omega k T)}{a^2 + 2a \cos \omega T + 1} \\
& \quad - \frac{(-a)^k(a + \cos \omega T)}{a^2 + 2a \cos \omega T + 1} \tag{12.29}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Z^{-1} \left[ \frac{z \sin \omega T}{(z^2 - 2z \cos \omega T + 1)(z + a)} \right] \\
& = \frac{\sin \omega T \sin[\omega(k-1)T]}{\sin \omega T (a^2 + 2a \cos \omega T + 1)} \\
& \quad + \frac{a \sin \omega T \sin(\omega k T)}{\sin \omega T (a^2 + 2a \cos \omega T + 1)} \\
& \quad + \frac{(-a)^k \sin \omega T}{a^2 + 2a \cos \omega T + 1} \\
& = \frac{(a + \cos \omega T) \sin(\omega k T) - \sin \omega T \cos(\omega k T)}{a^2 + 2a \cos \omega T + 1} \\
& \quad + \frac{(-a)^k \sin \omega T}{a^2 + 2a \cos \omega T + 1} \tag{12.30}
\end{aligned}$$

按(12.27)及(12.28)分别取反 $z$ 变换, 利用(12.29)(12.30)即可得(12.24)及(12.25)之解。

附记: 因 $a^2 + 2a \cos \omega T + 1 = (a + \cos \omega T)^2 + \sin^2 \omega T$ , 故例外情形为  $\sin \omega T = 0$ ,  $\cos \omega T = \pm 1$ ,  $a = \mp 1$  此时原给方程为

$$x(kT + T) \pm x(kT) = \mp 1,$$

$$y(kT + T) \pm y(kT) = 0$$

它们的解易于求出, 读者可自行证明之。

## § 13 带右端项的二阶常系数 线性差分方程的解

我们来解差分方程

$$x(kT + 2T) + ax(kT + T) + bx(kT) = f(kT) \quad (13.1)$$

取  $Z$  变换, 可有

$$z^2[X(z) - x(0) - x(T)z^{-1}] + az[X(z) - x(0)] + bX(z) = F(z)$$

其中  $X(z) = Z[x(kT)]$   $F(z) = Z[f(kT)]$

由此可有

$$(z^2 + az + b)X(z) = x(0)z^2 + [x(T) + ax(0)]z + F(z)$$

从而

$$X(z) = \frac{x(0)z^2 + [x(T) + ax(0)]z}{z^2 + az + b} + \frac{F(z)}{z^2 + az + b} \quad (13.2)$$

由§11的(11.3')可见, 右端第一分式的反  $z$  变换给出相应不带右端项的方程的通解, 即(13.1)的补函数, 从而右端第二分式的反  $z$  变换给出(13.1)的一个特解。

设  $z^2 + az + b = 0$  两根为  $\alpha, \beta$

(i) 设  $\alpha \neq \beta$ , 则按(13.2)取反  $z$  变换, 可有



$$x(kT) = C_1 a^k + C_2 \beta^k + Z^{-1} \left[ \frac{F(z)}{z^2 + az + b} \right] \quad (13.3)$$

其中  $C_1$  及  $C_2$  为常数。又

$$\begin{aligned} \frac{F(z)}{z^2 + az + b} &= \frac{F(z)}{(z - \alpha)(z - \beta)} \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left\{ \frac{1}{z - \alpha} F(z) - \frac{1}{z - \beta} F(z) \right\} \end{aligned} \quad (13.4)$$

如§12的(12.4), 写

$$\begin{aligned} \varphi_1(kT) &= \begin{cases} \alpha^{k-1} & \text{在 } k \geq 1 \\ 0 & \text{在 } k = 0 \end{cases} \\ \varphi_2(kT) &= \begin{cases} \beta^{k-1} & \text{在 } k \geq 1 \\ 0 & \text{在 } k = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

则(13.4)可写成

$$\begin{aligned} \frac{F(z)}{z^2 + az + b} &= \frac{1}{\alpha - \beta} \{ Z[\varphi_1(kT)]Z[f(kT)] \\ &\quad - Z[\varphi_2(kT)]Z[f(kT)] \} \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \{ Z[(\varphi_1 * f)(kT)] \\ &\quad - Z[(\varphi_2 * f)(kT)] \} \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} Z^{-1} \left[ \frac{F(z)}{z^2 + az + b} \right] &= \frac{1}{\alpha - \beta} \{ (\varphi_1 * f)(kT) - (\varphi_2 * f)(kT) \} \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \{ f(0)\varphi_1(kT) + f(T)\varphi_1(kT - T) + \dots \\ &\quad + f(kT - T)\varphi_1(T) + f(kT)\varphi_1(0) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -f(0)\varphi_2(kT) - f(T)\varphi_2(kT-T) - \dots \\
& -f(kT-T)\varphi_2(T) - f(kT)\varphi_2(0)\} \\
& = \frac{1}{a-\beta} \{f(0)(a^{k-1} - \beta^{k-1}) + f(T)(a^{k-2} - \beta^{k-2}) + \dots \\
& \quad + f(kT-2T)(a-\beta)\} \quad (13.5)
\end{aligned}$$

把(13.5)代入(13.3), 可得(13.1)的通解

$$\begin{aligned}
x(kT) &= C_1 a^k + C_2 \beta^k \\
& + \frac{1}{a-\beta} \{f(0)(a^{k-1} - \beta^{k-1}) + \\
& + f(T)(a^{k-2} - \beta^{k-2}) + \dots + f(kT-2T)(a-\beta)\} \quad (13.6)
\end{aligned}$$

我们也可用递推法得出特解(13.5)。因为我们目的只求特解, 为简单起见, 由(13.2)我们可取

$$x(0) = 0 \quad x(T) = 0$$

在这两个条件下, 于(13.1)取  $k=0$ , 可有

$$x(2T) = f(0) \quad @$$

于(13.1)中取  $k=1$  得  $x(3T) + ax(2T) = f(T)$ , 注意  $-a = a + \beta$ , 利用@, 可得

$$x(3T) = (a + \beta)f(0) + f(T) \quad ⑥$$

于(13.1)中取  $k=2$ , 可有  $x(4T) + ax(3T) + bx(2T) = f(2T)$

注意  $a = -(a + \beta)$ ,  $b = a\beta$ , 并利用@及⑥, 可有

$$\begin{aligned}
x(4T) &= (a + \beta)x(3T) - a\beta x(2T) + f(2T) \\
&= (a^2 + a\beta + \beta^2)f(0) + (a + \beta)f(T) + f(2T) \\
&= \frac{1}{a-\beta} \{(a^3 - \beta^3)f(0) + (a^2 - \beta^2)f(T) \\
& \quad + (a - \beta)f(2T)\}
\end{aligned}$$

由此我们归纳出:

$$x(kT) = \frac{1}{a - \beta} \{ (\alpha^{k-1} - \beta^{k-1}) f(0)$$

$$+ (\alpha^{k-2} - \beta^{k-2}) f(T) + \cdots + (\alpha - \beta) f(kT - 2T) \} \quad \textcircled{c}$$

我们来完成归纳法: 我们设 $\textcircled{c}$ 将 $k$ 换为 $k + 1$ 也成立, 即设

$$x(kT + T) = \frac{1}{a - \beta} \{ (\alpha^k - \beta^k) f(0)$$

$$+ (\alpha^{k-1} - \beta^{k-1}) f(T) + \cdots + (\alpha - \beta) f(kT - T) \} \quad \textcircled{d}$$

如果由方程(13.1)并根据 $\textcircled{c}$ 和 $\textcircled{d}$ 能得出  $x(kT + 2T)$  也具有类似的形式 (即于 $\textcircled{c}$ 将 $k$ 换为 $k + 2$ 所得的形式), 那末归纳法即告完成。现由(13.1)可有

$$x(kT + 2T) = (a + \beta) x(kT + T) - a\beta x(kT) + f(kT) \quad \textcircled{e}$$

以 $\textcircled{d}$ 及 $\textcircled{c}$ 代入 $\textcircled{e}$ 并注意

$$(a + \beta)(\alpha^k - \beta^k) - a\beta(\alpha^{k-1} - \beta^{k-1}) \equiv \alpha^{k+1} - \beta^{k+1}$$

以及将 $k$ 换为 $k - 1, k - 2, \dots, 2, 1$ 的类似等式, 可直接得到

$$\begin{aligned} x(kT + 2T) = & \frac{1}{a - \beta} \{ (\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}) f(0) \\ & + (\alpha^k - \beta^k) f(T) + \cdots + (\alpha^3 - \beta^3) f(kT - 2T) \\ & + (\alpha^2 - \beta^2) f(kT - T) \} + f(kT) \end{aligned}$$

这和 $\textcircled{c}$ 及 $\textcircled{d}$ 有类似的形式, 即可于 $\textcircled{c}$ 将 $k$ 换为 $k + 2$ 或于 $\textcircled{d}$ 将 $k$ 换为 $k + 1$ 得出。(13.5)由归纳法重新得证。

对于具体的例子, 我们也可不用卷积公式

$$Z[\varphi(kT)]Z[f(kT)] = Z[(\varphi \cdot f)(kT)]$$

而用查表法或留数法直接求

$$Z^{-1} \left[ \frac{F(z)}{z^2 + az + b} \right]$$

(ii) 设  $a, \beta$  为两共轭复根。用三角式

$$a = \rho(\cos\varphi + j\sin\varphi) \quad \beta = \rho(\cos\varphi - j\sin\varphi)$$

此时,  $a = -(\alpha + \beta) = -2\rho\cos\varphi$   $b = \alpha\beta = \rho^2$  将  $a$  及  $\beta$  之式代入(13.6), 通解变成

$$\begin{aligned} x(kT) = & \rho^k (A \cos k\varphi + B \sin k\varphi) + \\ & + \frac{1}{\sin\varphi} \{ f(0) \rho^{k-2} \sin(k-1)\varphi + \\ & + f(T) \rho^{k-3} \sin(k-2)\varphi + \dots + f(kT-2T) \sin\varphi \} \end{aligned} \quad (13.7)$$

(iii) 设  $\beta = a$ , 则补函数为  $a^k(C_1 + C_2 k)$  特解为

$$Z^{-1} \left[ \frac{F(z)}{(z-a)^2} \right]$$

今

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-a)^2} &= \frac{1}{z^2} \left( 1 - \frac{a}{z} \right)^{-2} = \frac{1}{z^2} \left( 1 + \frac{2a}{z} + \frac{3a^2}{z^2} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{(k-1)a^{k-2}}{z^{k-2}} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{z^2} + \frac{2a}{z^3} + \frac{3a^2}{z^4} + \dots + \frac{(k-1)a^{k-2}}{z^k} + \dots \end{aligned}$$

故写

$$\psi(kT) = \begin{cases} (k-1)a^{k-2} & \text{在 } k \geq 1 \\ 0 & \text{在 } k = 0 \end{cases}$$

可有  $\frac{1}{(z-a)^2} = Z[\psi(kT)]$

注意这结果亦可由

$$\frac{z}{(z-a)^2} = Z[k a^{k-1}] \quad (37^\circ)$$

应用§6性质 (三) 的第一式得出 (取该处  $n = 1$ )。

注意  $F(z) = Z[f(kT)]$  于是

$$\begin{aligned} \frac{F(z)}{(z-a)^2} &= Z[\psi(kT)]Z[f(kT)] = Z[(\psi \cdot f)(kT)] \\ &= Z[\psi(0)f(kT) + \psi(T)f(kT-T) \\ &\quad + \psi(2T)f(kT-2T) + \psi(3T)f(kT-3T) \\ &\quad + \cdots + \psi(kT)f(0)] \\ &= Z[f(kT-2T) + 2af(kT-3T) + \cdots \\ &\quad + (k-1)a^{k-2}f(0)] \end{aligned}$$

故特解为

$$\begin{aligned} Z^{-1}\left[\frac{F(z)}{(z-a)^2}\right] &= f(0)(k-1)a^{k-2} + \\ &\quad + f(T)(k-2)a^{k-3} + \cdots + f(kT-3T)2a \\ &\quad + f(kT-2T) \end{aligned} \quad (13.8)$$

注意这结果可于(13.5)中令  $\beta \rightarrow a$  取极限得出:

$$\lim_{\beta \rightarrow a} \frac{a^{k-1} - \beta^{k-1}}{a - \beta} = (k-1)a^{k-2} \quad (\text{按罗比达法则})$$

等等。特解(13.8)亦可于(13.7)令  $\varphi \rightarrow 0$ ,  $\rho \rightarrow a$  取极限得到

$$\left. \frac{\sin(k-1)\varphi}{\sin\varphi} \right|_{\varphi=0} = k-1, \cdots$$

加补函数  $a^k(C_1 + C_2 k)$  于(13.8)即得

$$x(kT+2T) - 2ax(kT+T) + a^2x(kT) = f(kT)$$

的通解

$$\begin{aligned} x(kT) = & a^k(C_1 + C_2 k) + [f(0)(k-1)a^{k-2} \\ & + f(T)(k-2)a^{k-3} + \cdots + f(kT-3T)2a \\ & + f(kT-2T)] \end{aligned} \quad (13.8')$$

我们举几个例子。

例1.  $x(kT+2T) + ax(kT+T) + bx(kT) = \mu^k$

解  $f(kT) = \mu^k$  设  $r^2 + ar + b = 0$  的两根为  $\alpha, \beta$

(i)  $\alpha \neq \beta$  由(13.6), 通解为

$$\begin{aligned} x(kT) = & C_1 \alpha^k + C_2 \beta^k \\ & + \frac{1}{\alpha - \beta} \{ (\alpha^{k-1} - \beta^{k-1}) + \mu(\alpha^{k-2} - \beta^{k-2}) + \cdots \\ & \quad + \mu^{k-2}(\alpha - \beta) \} \\ = & C_1 \alpha^k + C_2 \beta^k + \frac{1}{\alpha - \beta} \{ (\alpha^{k-1} + \mu\alpha^{k-2} + \cdots \\ & \quad + \mu^{k-2}\alpha) - (\beta^{k-1} + \mu\beta^{k-2} + \cdots + \mu^{k-2}\beta) \} \quad (*) \end{aligned}$$

若  $\mu$  不为辅助方程  $r^2 + ar + b = 0$  之根, 即  $\mu^2 + a\mu + b \neq 0$  ( $\mu \neq \alpha, \mu \neq \beta$ ), 则将花括号中之式化成封闭形得通解

$$\begin{aligned} x(kT) = & C_1 \alpha^k + C_2 \beta^k \\ & + \frac{1}{\alpha - \beta} \left( \frac{\alpha^k - \alpha\mu^{k-1}}{\alpha - \mu} - \frac{\beta^k - \beta\mu^{k-1}}{\beta - \mu} \right) \\ = & A\alpha^k + B\beta^k + \frac{\mu^{k-1}}{\alpha - \beta} \left( \frac{\beta}{\beta - \mu} - \frac{\alpha}{\alpha - \mu} \right) \\ = & A\alpha^k + B\beta^k + \frac{\mu^k}{(\alpha - \mu)(\beta - \mu)} \\ = & A\alpha^k + B\beta^k + \frac{\mu^k}{\mu^2 + a\mu + b} \end{aligned} \quad (13.9)$$

其中  $A$  及  $B$  为常数(与  $k$  无关)。一特解为  $\frac{\mu^k}{\mu^2 + a\mu + b}$ , 形式很简单, 分母是以  $\mu$  代辅助方程的未知数的结果。

若  $\mu = \alpha \neq \beta$ , 则所给方程右端为  $\alpha^k$ , 并且由(\*), 可见通解为

$$\begin{aligned} x(kT) &= C_1 \alpha^k + C_2 \beta^k + \\ &\quad + \frac{1}{\alpha - \beta} \left\{ (k-1) \alpha^{k-1} - \frac{\beta^k - \beta \alpha^{k-1}}{\beta - \alpha} \right\} \\ &= A \alpha^k + B \beta^k + \frac{k \alpha^{k-1}}{\alpha - \beta} \end{aligned} \quad (13.10)$$

其中  $A$  及  $B$  不依赖  $k$ 。一个特解为  $k \alpha^{k-1} / (\alpha - \beta)$ 。

(ii) 设  $\alpha$  及  $\beta$  为共轭复根:

$$\alpha = \rho(\cos\varphi + j\sin\varphi) \quad \beta = \rho(\cos\varphi - j\sin\varphi)$$

原给方程可写成

$$x(kT + 2T) - 2\rho\cos\varphi x(kT + T) + \rho^2 x(kT) = \mu^k \quad (13.11)$$

辅助方程为  $v^2 - 2\rho\cos\varphi \cdot v + \rho^2 = 0$  如果  $\mu$  为实数, 则  $\mu$  不是辅助方程之根, 故(13.9)仍能用, 从而(13.11)的通解为

$$\begin{aligned} x(kT) &= \rho^k (c_1 \cos k\varphi + c_2 \sin k\varphi) + \mu^k / (\mu^2 + a\mu + b) \\ &= \rho^k (c_1 \cos k\varphi + c_1 \sin k\varphi) \\ &\quad + \mu^k / (\mu^2 + \rho^2 - 2\mu\rho\cos\varphi) \end{aligned} \quad (13.12)$$

(iii)  $\beta = \alpha$ , 此时所给方程成为

$$x(kT + 2T) - 2\alpha x(kT + T) + \alpha^2 x(kT) = \mu^k$$

辅助方程为  $r^2 - 2\alpha r + \alpha^2 = 0$  补函数为  $\alpha^k (C_1 + C_2 k)$  如果  $\mu \neq \alpha$ , 则由(13.9)可得解  $\mu^k / (\mu^2 + a\mu + b) = \mu^k / (\mu - \alpha)^2$  此结果亦可于(13.12)末项取  $\varphi = 0$ ,  $\rho = \alpha$  得到。此

时通解为

$$x(kT) = a^k(C_1 + C_2 k) + \mu^k/(\mu - a)^2 \quad (13.13)$$

如果  $\mu = a$  则所给方程成为

$$x(kT + 2T) - 2ax(kT + T) + a^2x(kT) = a^k \quad (13.14)$$

其一特解按(13.8)为

$$\begin{aligned} & 1 \cdot (k-1)a^{k-2} + a(k-2)a^{k-3} + \cdots + a^{k-3} \cdot 2a + a^{k-2} \cdot 1 \\ &= (k-1)a^{k-2} + (k-2)a^{k-2} + \cdots + 2a^{k-2} + a^{k-2} \\ &= a^{k-2}[(k-1) + (k-2) + \cdots + 2 + 1] = k(k-1)a^{k-2}/2 \end{aligned}$$

此特解亦可借助于(13.13)得出。由(13.13)可见一特解为

$$\left. \frac{\mu^k - \mu k a^{k-1} + (k-1)a^k}{(\mu - a)^2} \right|_{\mu = a}$$

按罗毕达法则, 得

$$\left. \frac{k\mu^{k-1} - k a^{k-1}}{2(\mu - a)} \right|_{\mu = a} = \frac{k(k-1)a^{k-2}}{2}$$

故(13.14)的通解为

$$\left. \begin{aligned} x(kT) &= a^k(C_1 + C_2 k) + k(k-1)a^{k-2}/2 \\ &= a^k(A + Bk) + k^2 a^{k-2}/2 \end{aligned} \right\} \quad (13.15)$$

另解, 我们用待定系数法求

$$x(kT + 2T) + ax(kT + T) + bx(kT) = \mu^k \quad (13.16)$$

的特解。我们设此方程有

$$x(kT) = A\mu^k \quad (13.17)$$

形式的解, 其中  $A$  为待定常数。以(13.17)代入(13.16)可有

$$A\mu^{k+2} + aA\mu^{k+1} + bA\mu^k = \mu^k$$

即

$$A(\mu^2 + a\mu + b) = 1$$

如果  $\mu^2 + a\mu + b \neq 0$ , 可得  $A = 1/(\mu^2 + a\mu + b)$ , 从而得特解  $\mu^k/(\mu^2 + a\mu + b)$ , 同(13.9)中末项, 加上补函数即得通解。如果  $\mu^2 + a\mu + b = 0$ , 则不能设(13.17)形式的特解。



现在我们可设特解

$$x(kT) = Ak\mu^k, A \text{ 为待定常数} \quad (13.18)$$

以(13.18)代入(13.16)可有

$$A(k+2)\mu^{k+2} + aA(k+1)\mu^{k+1} + bAk\mu^k = \mu^k$$

即  $Ak(\mu^2 + a\mu + b) + A(2\mu^2 + a\mu) = 1$

即  $A(2\mu + a)\mu = 1$

如果  $2\mu + a \neq 0$  (当然  $\mu \neq 0$ ) , 可得  $A = 1/(2\mu^2 + a\mu)$ 。特

解为  $\frac{k\mu^k}{2\mu^2 + a\mu} = \frac{k\mu^{k-1}}{2\mu + a}$  由  $2\mu + a = 2a + a = 2a - (a + \beta)$   
 $= (a - \beta)$ , 此与(13.10)的末项相同

如果  $2\mu + a = 0$ , 则设特解(13.18)也不行, 我们可设  
 特解  $x(kT) = Ak^2\mu^k \quad (13.19)$

以此代入(13.16)得

$$A(k+2)^2\mu^{k+2} + aA(k+1)^2\mu^{k+1} + bAk^2\mu^k = \mu^k$$

即  $A[(k+2)^2\mu^2 + a(k+1)^2\mu + bk^2] = 1$

即  $A[k^2(\mu^2 + a\mu + b) + 2k(2\mu^2 + a\mu) + 4\mu^2 + a\mu] = 1$

计及  $\mu^2 + a\mu + b = 0$ ,  $2\mu^2 + a\mu = 0$ , 此化成  $A \cdot 2\mu^2 = 1$ , 从而  $A = 1/(2\mu^2)$  代入(13.19)得特解

$$x(kT) = k^2\mu^{k-2}/2 \quad \text{同(13.15)末项。}$$

此时所给方程为  $x(kT+2T) - 2\mu x(kT+T) + \mu^2 x(kT) = \mu^k$

这种方法看起来很简单, 但作三种假定(13.17),  
 (13.18), (13.19)是不容易想出的。

三解。直接运用  $z$  变换于所给方程(13.16), 可有

$$z^2[X(z) - x(0) - x(T)z^{-1}] + az[X(z) - x(0)]$$

$$+ bX(z) = \frac{z}{z - \mu}$$

$$X(z) = \frac{x(0)z^2 + [x(T) + ax(0)]z}{z^2 + az + b} + \frac{z}{(z^2 + az + b)(z - \mu)}$$

如(13.2), 右端第一分式的反 $z$ 变换给出补函数。我们只须求特解

$$\varphi(kT) = Z^{-1} \left\{ \frac{z}{(z^2 + az + b)(z - \mu)} \right\} \quad (13.20)$$

第一解法乃是利用§6性质(五)卷积公式。现在我们查表求(13.20), 以 $\alpha, \beta$ 表示辅助方程 $r^2 + ar + b = 0$ 的两根。

(i) 设 $\alpha \neq \beta$  (包括 $\alpha$ 及 $\beta$ 为一对共轭复数), 并设 $\mu \neq \alpha, \mu \neq \beta$ , 则查续表42°, 可有

$$\begin{aligned} \varphi(kT) &= Z^{-1} \left[ \frac{z}{(z - \alpha)(z - \beta)(z - \mu)} \right] \\ &= \frac{\alpha^k}{(\alpha - \beta)(\alpha - \mu)} + \frac{\beta^k}{(\beta - \alpha)(\beta - \mu)} \\ &\quad + \frac{\mu^k}{(\mu - \alpha)(\mu - \beta)} \end{aligned}$$

末端前两项已包含在补函数中, 故可取特解

$$\frac{\mu^k}{(\mu - \alpha)(\mu - \beta)} = \frac{\mu^k}{\mu^2 + a\mu + b} \quad \text{同(13.9)末项。}$$

如果 $\mu = \alpha \neq \beta$ , 则查续表41°, 可有

$$\begin{aligned} \varphi(kT) &= Z^{-1} \left[ \frac{z}{(z - \alpha)^2(z - \beta)} \right] \\ &= \frac{k\alpha^{k-1}}{\alpha - \beta} - \frac{\alpha^k - \beta^k}{(\alpha - \beta)^2} \end{aligned}$$

末端项已包含在补函数中，故可取特解

$$k a^{k-1} / (a - \beta) \quad \text{同(13.10)末项。}$$

(ii) 设  $\beta = a$  并设  $\mu \neq a$ ，则查续表41°，

$$\begin{aligned} \varphi(kT) &= Z^{-1} \left[ \frac{z}{(z-a)^2(z-\mu)} \right] \\ &= \frac{k a^{k-1}}{a-\mu} - \frac{a^k - \mu^k}{(a-\mu)^2} \end{aligned}$$

舍去包含在补函数  $(C_1 + C_2 k) a^k$  中之项，可取特解

$$\mu^k / (\mu - a)^2 = \mu^k / (\mu^2 + a\mu + b) \quad \text{同(13.9)末项。}$$

若  $\mu = a = \beta$ ，则查续表40°，可有

$$\begin{aligned} \varphi(kT) &= Z^{-1} \left[ \frac{z}{(z-a)^3} \right] = \frac{1}{2} k(k-1) a^{k-2} \\ &= \frac{1}{2} k^2 a^{k-2} - \frac{1}{2a^2} \cdot k a^k \\ &\quad (\text{在 } a \neq 0) \end{aligned}$$

并且末项包含在补函数中，故可取特解  $k^2 a^{k-2} / 2$ ，与(13.15)末项相同。如果  $a = 0$  则原方程成为  $x(kT + 2T) = a^k$ ，而我们应理解：在  $a = 0$  时， $a^k|_{k \rightarrow 0} = 1$  并且  $a^k|_{k \geq 1} = 0$  特解为  $\frac{1}{2} k(k-1) a^{k-2} |_{a \rightarrow 0}$

$$\begin{aligned} \text{例2. } x(kT + 2T) + a x(kT + T) + b x(kT) \\ &= \cos(\omega kT) \\ y(kT + 2T) + a y(kT + T) + b y(kT) \\ &= \sin(\omega kT) \end{aligned}$$

解 写  $w = x + jy$ ，则

$$w(kT + 2T) + a w(kT + T) + b w(kT) = e^{j\omega kT}$$

取  $\mu = e^{j\omega T}$ , 这就是例 1 的方程。如果  $e^{j\omega T}$  不是辅助方程的根, 即如果  $e^{2j\omega T} + ae^{j\omega T} + b \neq 0$ , 则由 (13.9) 的末项, 可得  $w$  一方程的特解

$$\begin{aligned} \frac{e^{j\omega kT}}{e^{2j\omega T} + ae^{j\omega T} + b} &= \frac{e^{j\omega kT}(e^{-2j\omega T} + ae^{-j\omega T} + b)}{(e^{2j\omega T} + ae^{j\omega T} + b)(e^{-2j\omega T} + ae^{-j\omega T} + b)} \\ &= \frac{e^{j\omega(k-2)T} + ae^{j\omega(k-1)T} + be^{j\omega kT}}{1 + a^2 + b^2 + 2a(1+b)\cos\omega T + 2b\cos(2\omega T)} \end{aligned}$$

分开实部及虚部即得  $x$  一方程及  $y$  一方程的特解

$$\frac{\cos[\omega(k-2)T] + a\cos[\omega(k-1)T] + b\cos(\omega kT)}{1 + a^2 + b^2 + 2a(1+b)\cos\omega T + 2b\cos(2\omega T)} \quad (1)$$

及 
$$\frac{\sin[\omega(k-2)T] + a\sin[\omega(k-1)T] + b\sin(\omega kT)}{1 + a^2 + b^2 + 2a(1+b)\cos\omega T + 2b\cos(2\omega T)}$$

若  $e^{j\omega T}$  为辅助方程  $r^2 + ar + b = 0$  的根, 则  $e^{-j\omega T}$  亦为此方程的根。于是  $w$  一方程可表示为

$$w(kT + 2T) - 2\cos\omega T w(kT + T) + w(kT) = e^{j\omega kT}$$

按 (13.10) 的末项, 此  $w$  一方程的特解为

$$\frac{k e^{j\omega(k-1)T}}{e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}} = \frac{k e^{j\omega(k-1)T}}{2j\sin\omega T}$$

分开实部及虚部即得

$$x(kT + 2T) - 2\cos\omega T x(kT + T) + x(kT) = \cos(\omega kT)$$

及 
$$y(kT + 2T) - 2\cos\omega T y(kT + T) + y(kT) = \sin(\omega kT)$$
  
的特解分别为

①加上相同的补函数即得所给两个方程的通解。

$$\frac{k \sin[\omega(k-1)T]}{2 \sin \omega T} \quad \text{及} \quad -\frac{k \cos[\omega(k-1)T]}{2 \sin \omega T}$$

上述两个方程的补函数均为  $C_1 \cos(\omega k T) + C_2 \sin(\omega k T)$ , 所以两方程的通解分别为

$$x(kT) = C_1 \cos(\omega k T) + C_2 \sin(\omega k T) + \frac{k \sin[\omega(k-1)T]}{2 \sin \omega T}$$

$$\text{及} \quad y(kT) = C_1 \cos(\omega k T) + C_2 \sin(\omega k T) - \frac{k \cos[\omega(k-1)T]}{2 \sin \omega T}$$

$$\text{例3.} \quad x(kT + 2T) + ax(kT + T) + bx(kT) = kT \quad (13.21)$$

解  $f(kT) = kT$  设辅助方程  $r^2 + ar + b = 0$  的两根为  $\alpha, \beta$

(i)  $\alpha \neq \beta$ . 按(13.5), 此方程的一个特解为

$$\frac{T}{\alpha - \beta} \{ (\alpha^{k-2} - \beta^{k-2}) + 2(\alpha^{k-3} - \beta^{k-3}) + \dots + (k-2)(\alpha - \beta) \} = \frac{T}{\alpha - \beta} (P - Q) \quad (13.22)$$

其中我们令

$$P = \alpha^{k-2} + 2\alpha^{k-3} + \dots + (k-3)\alpha^2 + (k-2)\alpha \quad (13.23)$$

$$Q = \beta^{k-2} + 2\beta^{k-3} + \dots + (k-3)\beta^2 + (k-2)\beta \quad (13.24)$$

我们把  $P$  变为封闭形。现

$$P = (k-2)\alpha + (k-3)\alpha^2 + \dots + 2\alpha^{k-3} + \alpha^{k-2}$$

$$\alpha P = (k-2)\alpha^2 + \dots + 3\alpha^{k-3} + 2\alpha^{k-2} + \alpha^{k-1}$$

两式按同幂项相减, 可有

$$(1-a)P = (k-2)a - a^2 - \dots - a^{k-3} - \dots - 1$$

若  $a \neq 1$ , 则

$$(1-a)P = (k-2)a - \frac{a^2 - a^k}{1-a} = \frac{a^k}{1-a} + \frac{a^2 - 2a}{1-a} + ka$$

$$\text{故 } P = \frac{a^k}{(1-a)^2} + \frac{a^2 - 2a}{(1-a)^2} + \frac{ka}{1-a} \quad (a \neq 1)$$

(13.23)

$$\text{同样 } Q = \frac{\beta^k}{(1-\beta)^2} + \frac{\beta^2 - 2\beta}{(1-\beta)^2} + \frac{k\beta}{1-\beta} \quad (\beta \neq 1)$$

(13.24')

由于含  $a^k$  之项及含  $\beta^k$  之项已包含在补函数中, 故以 (13.23') 及 (13.24') 代入 (13.22), 可见在  $a \neq 1$ ,  $\beta \neq 1$ ,  $a \neq \beta$  时, 我们能取特解

$$\begin{aligned} & \frac{T}{a-\beta} \left\{ \frac{a^2 - 2a}{(1-a)^2} - \frac{\beta^2 - 2\beta}{(1-\beta)^2} + k \left( \frac{a}{1-a} - \frac{\beta}{1-\beta} \right) \right\} \\ &= T \left\{ \frac{(\alpha^2 - 2\alpha)(\beta^2 - 2\beta + 1) - (\beta^2 - 2\beta)(\alpha^2 - 2\alpha + 1)}{(a-\beta)(1-a)^2(1-\beta)^2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{k}{(1-a)(1-\beta)} \right\} \\ &= T \left\{ \frac{(\alpha^2 - 2\alpha) - (\beta^2 - 2\beta)}{(a-\beta)(1-a)^2(1-\beta)^2} + \frac{k}{(1-a)(1-\beta)} \right\} \\ &= T \left\{ \frac{a + \beta - 2}{[1 - (a + \beta) + a\beta]^2} + \frac{k}{1 - (a + \beta) + a\beta} \right\} \\ &= T \left\{ \frac{k}{1 + a + b} - \frac{a + 2}{(1 + a + b)^2} \right\} \quad \textcircled{1} \end{aligned} \quad (13.25)$$

①注意消去分子及分母中的  $\alpha - \beta$ , 结果对  $\alpha = \beta$  也能用

这解在  $1+a+b \neq 0$  时能用。这条件意味着 1 不是辅助方程  $r^2 + ar + b = 0$  的根 (即  $a \neq 1, \beta \neq 1$ )。加补函数  $C_1 a^k + C_2 \beta^k$  于(13.25)即得通解。

若  $a = 1 \neq \beta$ , 即辅助方程的两根为 1,  $\beta$ , 则  $1 + \beta = -a$ , 且  $\beta = b$ , 补函数为  $C_1 + C_2 b^k$ 。又由(13.23)有

$P = 1 + 2 + \cdots + (k-3) + (k-2) = (k-1)(k-2)/2$   
由(13.24'), 可有

$$Q = \frac{b^k}{(1-b)^2} + \frac{b^2 - 2b}{(1-b)^2} + \frac{k b}{1-b}$$

将  $P$  及  $Q$  代入(13.22), 不计包含在补函数中之项, 可得特解

$$\begin{aligned} & \frac{T}{1-b} \left\{ \frac{1}{2} (k^2 - 3k) - \frac{b k}{1-b} \right\} \\ &= \frac{T}{2} \left\{ \frac{k^2}{1-b} + \frac{k(b-3)}{(1-b)^2} \right\} \end{aligned}$$

故  $x(kT + 2T) - (1+b)x(kT + T) + b x(kT) = kT$  在  $b \neq 1$  时的通解为

$$x(kT) = C_1 + C_2 b^k + \frac{T}{2} \left\{ \frac{k^2}{1-b} + \frac{k(b-3)}{(1-b)^2} \right\} \quad (13.26)$$

如果  $\beta = 1 \neq a$ , 亦得相同的结果。

(ii) 若  $\beta = a$ , 则所给方程成为

$$x(kT + 2T) - 2a x(kT + T) + a^2 x(kT) = kT$$

补函数为  $a^k(C_1 + C_2 k)$ , 按(13.8)可有特解

$$\begin{aligned} & T[1(k-2)a^{k-3} + 2(k-3)a^{k-4} + \cdots + (k-3)2a \\ & \quad + (k-2)1] \end{aligned} \quad (13.27)$$

$$= T \frac{d}{da} [1 \cdot a^{k-2} + 2a^{k-3} + \cdots + (k-3)a^2 + (k-2)a]$$

$$= T \frac{dP}{da} \quad (\text{由(13.23)})$$

$$= T \frac{d}{da} \left[ \frac{a^k}{(1-a)^2} + \frac{a^2 - 2a}{(1-a)^2} + \frac{ka}{1-a} \right]$$

(由(13.23'), 设  $a \neq 1$ )

$$= T \left[ \frac{k a^{k-1}}{(1-a)^2} + \frac{2a^k}{(1-a)^3} - \frac{2}{(1-a)^3} + \frac{k}{(1-a)^2} \right]$$

舍去前两项（它们包含在补函数中），可见在  $a \neq 1$  时，我们能取特解如

$$T \left[ \frac{k}{(1-a)^2} - \frac{2}{(1-a)^3} \right]$$

注意：在(13.25)中取  $a = -2a$ ,  $b = a^2$ , 亦得此结果。故在  $a \neq 1$  时，所求通解为

$$x(kT) = a^k (C_1 + C_2 k) + T \left[ \frac{k}{(1-a)^2} - \frac{2}{(1-a)^3} \right]$$

若  $a = 1$ ，则特解(13.27)成为

$$\begin{aligned} & T[1 \cdot (k-2) + 2(k-3) + \cdots + (k-3)2 + (k-2)1] \\ &= T\{1[(k-1)-1] + 2[(k-1)-2] + \cdots \\ &+ (k-3)[(k-1)-(k-3)] + (k-2)[(k-1)-(k-2)]\} \\ &= T\{(k-1)[1+2+\cdots+(k-2)] - [1^2+2^2+\cdots+ \\ &\quad + (k-2)^2]\} \end{aligned}$$

$$= T \left[ \frac{1}{2}(k-1)^2(k-2) - \frac{1}{6}(k-1)(k-2)(2k-3) \right]$$

$$= \frac{T}{6} k(k-1)(k-2)$$



$$= \frac{T}{6} \{k^2(k-3) + 2k\}$$

由于在此情况下补函数为  $C_1 + C_2 k$ ，故可取特解

$$Tk^2(k-3)/6$$

从而得  $x(kT+2T) - 2x(kT+T) + x(kT)$  的通解

$$x(kT) = C_1 + C_2 k + Tk^2(k-3)/6$$

另解。考察上面的结果，可见 (13.21) 的特解一般是  $T$  乘  $k$  的一次式。我们能用待定系数法求方程 (13.21) 的特解。设 (13.21) 的特解如

$$T(Ak + B)$$

其中  $A$  及  $B$  为待定常数。代入 (13.21) 并消去  $T$ ，可有

$$A(k+2) + B + a[A(k+1) + B] + b(Ak + B) \equiv k$$

$$\text{即 } A(1+a+b)k + A(2+a) + B(1+a+b) \equiv k$$

$$\text{故 } A(1+a+b) = 1 \quad A(2+a) + B(1+a+b) = 0$$

如果  $1+a+b \neq 0$ ，则可解出

$$A = \frac{1}{1+a+b} \quad B = -\frac{a+2}{(1+a+b)^2}$$

$$\text{特解为 } T \left\{ \frac{k}{1+a+b} - \frac{a+2}{(1+a+b)^2} \right\} \quad \text{同(13.25)}$$

加上补函数即得通解。条件  $1+a+b \neq 0$  表明 1 不是辅助方程  $r^2 + ar + b = 0$  的根。

若  $1+a+b = 0$ ，则所给方程 (13.21) 可写成

$$x(kT+2T) - (1+b)x(kT+T) + bx(kT) = kT \quad (13.28)$$

我们设特解

$$T(Ak + B)k = T(Ak^2 + Bk)$$

代入(13.28)并消去 $T$ , 可有

$$A(k+2)^2 + B(k+2) - (1+b)[A(k+1)^2 + B(k+1)] + b(Ak^2 + Bk) \equiv k$$

$$\text{即 } 2A(1-b)k + [(1-b)B + (3-b)A] \equiv k$$

$$\text{故 } 2A(1-b) = 1 \quad (1-b)B + (3-b)A = 0$$

若  $b \neq 1$ , 则可解得

$$A = \frac{1}{2(1-b)} \quad B = \frac{b-3}{2(1-b)^2}$$

于是(13.28)的一个特解为

$$T \left[ \frac{k^2}{2(1-b)} + \frac{k(b-3)}{2(1-b)^2} \right] \quad \text{同(13.26)的末项。}$$

如果  $b = 1$ , 则由  $1+a+b=0$ , 可见  $a = -2$ , 差分方程成为

$$x(kT+2T) - 2x(kT+T) + x(kT) = kT \quad (13.29)$$

此时补函数为  $C_1 + C_2k$ 。如仍设特解  $T(Ak^2 + Bk)$ , 则第二项为补函数中之项。因此, 设(13.29)的特解为  $T(Ak^2 + Bk)k = T(Ak^3 + Bk^2)$ , 代入(13.29), 并消去 $T$ , 可有

$$\left. \begin{aligned} A(k+2)^3 + B(k+2)^2 \\ - 2A(k+1)^3 - 2B(k+1)^2 \\ + Ak^3 + Bk^2 \end{aligned} \right\} \equiv k$$

$$\text{即 } 6Ak + (6A + 2B) = 0$$

$$\text{从而 } 6A = 1 \quad 6A + 2B = 0$$

$$\text{于是 } A = 1/6 \quad B = -1/2$$

$$\text{故特解为 } T(k^3 - 3k^2)/6 = Tk^2(k-3)/6$$

通解为  $x(kT) = C_1 + C_2k + Tk^2(k-3)/6$  与上解(\*)相同

三解 施  $z$  变换于(13.21)可有

$$z^2[X(z) - x(0) - x(T)z^{-1}] + az[X(z) - x(0)] + bX(z) = Z[kT]$$

即

$$(z^2 + az + b)X(z) = x(0)z^2 + [x(T) + ax(0)]z + \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$X(z) = \frac{x(0)z^2 + [x(T) + ax(0)]z}{z^2 + az + b} + \frac{Tz}{(z^2 + az + b)(z-1)^2}$$

右端第一项的反  $z$  变换给出补函数, 第二项的反  $z$  变换给出特解

$$TZ^{-1}\left[\frac{z}{(z^2 + az + b)(z-1)^2}\right] \quad (13.30)$$

以  $\alpha, \beta$  表示  $z^2 + az + b = 0$  的两根, 并设  $\alpha \neq \beta$ , 再设 1 不是这方程的根, 即  $1 + a + b \neq 0$ , 则查续表 47°, 可见特解(13.30)等于

$$T\left[\frac{k}{(1-\alpha)(1-\beta)} - \frac{2-\alpha-\beta}{(1-\alpha)^2(1-\beta)^2} + \frac{\alpha^k}{(a-1)^2(a-\beta)} + \frac{\beta^k}{(\beta-1)^2(\beta-a)}\right]$$

由于末两项已包含在补函数中, 故可取特解

$$T\left[\frac{k}{(1-\alpha)(1-\beta)} - \frac{2-\alpha-\beta}{(1-\alpha)^2(1-\beta)^2}\right]$$

$$= T \left[ \frac{k}{1+a+b} - \frac{2+a}{(1+a+b)^2} \right] \quad \text{同(13.25)}$$

若  $1+a+b=0$ ，即  $a=-(1+b)$ ，则(13.30)可写成

$$TZ^{-1} \left[ \frac{z}{(z-b)(z-1)^3} \right] \quad (13.31)$$

若  $b \neq 1$ ，则查续表45°，其结果等于

$$T \left[ \frac{k(k-1)}{2(1-b)} - \frac{k}{(1-b)^2} + \frac{1-b^k}{(1-b)^3} \right]$$

由于末一项已包含在补函数中，故可取特解

$$T \left[ \frac{k(k-1)}{2(1-b)} - \frac{k}{(1-b)^2} \right] = \frac{T}{2} \left[ \frac{k^2}{1-b} + \frac{k(b-3)}{(1-b)^2} \right]$$

同(13.26)中的特解。

若  $b=1$ ，则(13.31)成为  $TZ^{-1}[z/(z-1)^4]$  查续表44°，其结果等于  $Tk(k-1)(k-2)/6$  同上二解末

$$\text{例4. } x(kT+2T) + ax(kT+T) + bx(kT) = (kT)^2 \quad (13.32)$$

解 以  $\alpha$  及  $\beta$  表辅助方程  $r^2 + ar + b = 0$  的两根。

(i)  $\alpha \neq \beta$ ，按(13.6)，方程(13.32)的特解为

$$\begin{aligned} & \frac{T^2}{\alpha - \beta} \{ (\alpha^{k-2} - \beta^{k-2}) + 2^2 (\alpha^{k-3} - \beta^{k-3}) + \dots \\ & \quad + (k-2)^2 (\alpha - \beta) \} \\ & = \frac{T^2}{\alpha - \beta} (P - Q) \end{aligned} \quad (13.33)$$

其中我们令

$$P = (k-2)^2 \alpha + (k-3)^2 \alpha^2 + \dots + 2^2 \alpha^{k-3} + \alpha^{k-2} \quad @$$

$$Q = (k-2)^2 \beta + (k-3)^2 \beta^2 + \dots + 2^2 \beta^{k-3} + \beta^{k-2}$$

我们来把 $P$ 及 $Q$ 化为封闭形。以 $a$ 乘④，可有

$$aP = (k-2)^2 a^2 + \cdots + 3^2 a^{k-3} + 2^2 a^{k-2} + a^{k-1} \quad \textcircled{b}$$

④及⑥按同幂项相减，可有

$$\begin{aligned} (1-a)P &= (k-2)^2 a - (2k-5)a^2 - \cdots - 5a^{k-3} \\ &\quad - 3a^{k-2} - a^{k-1} \\ &= (k-2)^2 a - S \end{aligned} \quad \textcircled{c}$$

其中我们令

$$S = (2k-5)a^2 + (2k-7)a^3 + \cdots + 3a^{k-2} + a^{k-1}$$

$$\text{今 } aS = (2k-5)a^3 + \cdots + 5a^{k-2} + 3a^{k-1} + a^k$$

两式按同幂项相减，可有

$$(1-a)S = (2k-5)a^2 - 2a^3 - \cdots - 2a^{k-2} - 2a^{k-1} - a^k$$

故如果 $a \neq 1$ ，则

$$\begin{aligned} (1-a)S &= (2k-5)a^2 - 2 \frac{a^3 - a^k}{1-a} - a^k \\ &= (2k-5)a^2 - \frac{2a^3 - a^k - a^{k+1}}{1-a} \end{aligned}$$

于是

$$S = \frac{(2k-5)a^2}{1-a} - \frac{2a^3 - a^k - a^{k+1}}{(1-a)^2}$$

代入⑥可得

$$P = (k-2)^2 \frac{a}{1-a} - \frac{(2k-5)a^2}{(1-a)^2} + \frac{2a^3 - a^k - a^{k+1}}{(1-a)^3}$$

换 $a$ 为 $\beta$ 得

$$Q = (k-2)^2 \frac{\beta}{1-\beta} - \frac{(2k-5)\beta^2}{(1-\beta)^2} + \frac{2\beta^3 - \beta^k - \beta^{k+1}}{(1-\beta)^3}$$

其中 $a \neq 1$ ， $\beta \neq 1$ ，（从而 $1+a+b \neq 0$ ）。

由于含  $\alpha^k, \beta^k, \alpha^{k+1}, \beta^{k+1}$  之项已包括在补函数中, 故按 (13.33) 我们可有 (13.32) 的一个特解:

$$\begin{aligned}
 & \frac{T^2}{\alpha - \beta} \left\{ (k-2)^2 \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} - \frac{\beta}{1-\beta} \right) \right. \\
 & \quad - (2k-5) \left[ \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2} - \frac{\beta^2}{(1-\beta)^2} \right] \\
 & \quad \left. + 2 \left[ \frac{\alpha^3}{(1-\alpha)^3} - \frac{\beta^3}{(1-\beta)^3} \right] \right\} \\
 &= T^2 \left\{ \frac{(k-2)^2}{(1-\alpha)(1-\beta)} - (2k-5) \frac{\alpha + \beta - 2\alpha\beta}{(1-\alpha)^2(1-\beta)^3} \right. \\
 & \quad \left. + 2 \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) + 3\alpha^2\beta^2}{(1-\alpha)^3(1-\beta)^3} \right\} \\
 &= T^2 \left\{ \frac{(k-2)^2}{1+a+b} + \frac{(2k-5)(a+2b)}{(1+a+b)^2} \right. \\
 & \quad \left. + 2 \frac{a^2 - b + 3ab + 3b^2}{(1+a+b)^3} \right\} \\
 &= T^2 \left\{ \frac{k^2}{1+a+b} - \frac{4(1+a+b) - 2(a+2b)}{(1+a+b)^2} k \right. \\
 & \quad \left. + \frac{4(1+a+b)^2 - 5(a+2b)(1+a+b) + 2(a^2 - b + 3ab + 3b^2)}{(1+a+b)^3} \right\} \\
 &= T^2 \left\{ \frac{k^2}{1+a+b} - \frac{(2a+4)k}{(1+a+b)^2} + \frac{a^2 - ab + 3a - 4b + 4}{(1+a+b)^3} \right\} \\
 & \hspace{15em} (13.34)
 \end{aligned}$$

当然, 这特解只在  $1+a+b \neq 0$  时能用。

(ii) 如果  $1+a+b=0$ , 则  $a=-(1+b)$ , 辅助方程

两根为  $\alpha = 1$ ,  $\beta = b$  我们设  $b \neq 1$  则

$$P = 1^2 + 2^2 + \cdots + (k-2)^2 = (k-1)(k-2)(2k-3)/6 \\ = (2k^3 - 9k^2 + 13k - 6)/6$$

$$Q = (k-2)^2 \frac{b}{1-b} - \frac{(2k-5)b^2}{(1-b)^2} + \frac{2b^3 - b^k - b^{k+1}}{(1-b)^3}$$

由于含  $b^k$  之项, 含  $b^{k+1} = b \cdot b^k$  之项及常数项均已包括在补函数  $C_1 + C_2 b^k$  中, 故按(13.33), 我们可取特解

$$\begin{aligned} & \frac{T^2}{1-b} \left\{ \frac{1}{6} (2k^3 - 9k^2 + 13k) - \frac{(k^2 - 4k)b}{1-b} + \frac{2kb^2}{(1-b)^2} \right\} \\ &= \frac{T^2}{1-b} \left\{ \frac{1}{3} k^3 + \frac{(b-3)k^2}{2(1-b)} + \frac{b^2 - 2b + 13}{6(1-b)^2} k \right\} \\ &= T^2 \left\{ \frac{k^3}{3(1-b)} + \frac{(b-3)k^2}{2(1-b)^2} + \frac{(b^2 - 2b + 13)k}{6(1-b)^3} \right\} \end{aligned} \quad (13.35)$$

如果  $b = 1$ , 则  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ , 差分方程成为

$$x(kT + 2T) - 2x(kT + T) + x(kT) = (kT)^2$$

公式(13.6)不能用, 可用(13.8), 特解为

$$\begin{aligned} & T^2 [1^2(k-2) + 2^2(k-3) + \cdots + (k-3)^2 2 + (k-2)^2 1] \\ &= T^2 \{ 1^2 [(k-1) - 1] + 2^2 [(k-1) - 2] + \cdots + \\ & \quad + (k-3)^2 [(k-1) - (k-3)] \\ & \quad + (k-2)^2 [(k-1) - (k-2)^2] \} \\ &= T^2 \{ (k-1) [1^2 + 2^2 + \cdots + (k-2)^2] \\ & \quad - [1^3 + 2^3 + \cdots + (k-2)^3] \} \\ &= T^2 \{ (k-1)^2 (k-2)(2k-3)/6 - (k-1)^2 (k-2)^2/4 \} \\ &= \frac{1}{12} T^2 (k-1)^2 (k-2) [2(2k-3) - 3(k-2)] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{12} T^2 k (k-1)^2 (k-2)$$

$$= \frac{1}{12} T^2 (k^4 - 4k^3 + 5k^2 - 2k)$$

由于末项已含在补函数  $C_1 + C_2 k$  中，故可取特解

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12} T^2 (k^4 - 4k^3 + 5k^2) \\ &= \frac{1}{12} T^2 k^2 (k^2 - 4k + 5) \end{aligned} \quad (13.36)$$

另解，我们用待定系数法重新求 (13.32) 的特解。由于 (13.23) 的右端是  $k$  的二次式，我们设此方程有特解

$T^2 (Ak^2 + Bk + C)$ ，其中  $A, B, C$  为待定系数。以此代入

$$x(kT + 2T) + ax(kT + T) + bx(kT) = (kT)^2$$

并消去  $T^2$ ，可有

$$\left. \begin{aligned} & A(k+2)^2 + B(k+2) + C \\ & aA(k+1)^2 + aB(k+1) + aC \\ & \quad + bAk^2 + bBk + bC \end{aligned} \right\} \equiv k^2$$

故  $A(1+a+b) = 1$

$$A(4+2a) + B(1+a+b) = 0$$

$$A(4+a) + B(2+a) + C(1+a+b) = 0$$

设  $1+a+b \neq 0$ ，则由此可解得

$$A = \frac{1}{1+a+b}$$

$$B = -\frac{4+2a}{(1+a+b)^2}$$



$$\begin{aligned}
C &= \frac{-1}{1+a+b} \left\{ \frac{4+a}{1+a+b} - \frac{(2+a)(4+2a)}{(1+a+b)^2} \right\} \\
&= \frac{(a+2)(2a+4) - (a+4)(a+b+1)}{(1+a+b)^3} \\
&= \frac{a^2 - ab + 3a - 4b + 4}{(1+a+b)^3}
\end{aligned}$$

故得特解

$$T^2 \left\{ \frac{k^2}{1+a+b} - \frac{(2a+4)k}{(1+a+b)^2} + \frac{a^2 - ab + 3a - 4b + 4}{(1+a+b)^3} \right\}$$

同(13.34)

若  $1+a+b=0$ ，即  $a=-(1+b)$ ，则差分方程成为

$$x(kT+2T) - (1+b)x(kT+T) + bx(kT) = (kT)^2 \quad (13.37)$$

若  $b \neq 1$ ，则补函数为  $C_1 + C_2 b^k$ 。如果仍设特解

$$T^2(Ak^2 + Bk + C)$$

则第三项为补函数中之项，不能解决问题。我们设特解

$$T^2(Ak^3 + Bk^2 + Ck)$$

代入(13.37)，消去  $T^2$ ，可有

$$\left. \begin{aligned}
&A(k+2)^3 + B(k+2)^2 + C(k+2) \\
&- (1+b)[A(k+1)^3 + B(k+1)^2 + C(k+1)] \\
&+ b(Ak^3 + Bk^2 + Ck)
\end{aligned} \right\} \equiv k^2$$

即

$$\left. \begin{aligned}
&3A(1-b)k^2 + [3A(3-b) + 2B(1-b)]k \\
&+ A(7-b) + B(3-b) + C(1-b)
\end{aligned} \right\} \equiv k^2$$

故  $3A(1-b) = 1 \quad 3A(3-b) + 2B(1-b) = 0$

$$A(7-b) + B(3-b) + C(1-b) = 0$$

由此得

$$A = \frac{1}{3(1-b)} \quad B = \frac{b-3}{2(1-b)^2}$$

$$C = \frac{1}{1-b} \left\{ \frac{b-7}{3(1-b)} + \frac{(b-3)^2}{2(1-b)^2} \right\} = \frac{b^2 - 2b + 13}{6(1-b)^3}$$

故方程(13.37)在  $b \neq 1$  时的特解为

$$T^2 \left\{ \frac{k^3}{3(1-b)} + \frac{(b-3)k^2}{2(1-b)^2} + \frac{(b^2 - 2b + 13)k}{6(1-b)^3} \right\}$$

同(13.35)

若  $b = 1$ , 则  $a = -(1+b) = -2$ , 差分方程为

$$x(kT + 2T) - 2x(kT + T) + x(kT) = (kT)^2 \quad (13.38)$$

补函数为  $C_1 + C_2 k$ 。我们设(13.38)的特解为

$$T^2 (Ak^2 + Bk + C)k^2 = T^2 (Ak^4 + Bk^3 + Ck^2)$$

代入(13.38)并消去  $T^2$ , 可有

$$\left. \begin{aligned} & A(k+2)^4 + B(k+2)^3 + C(k+2)^2 \\ & - 2A(k+1)^4 - 2B(k+1)^3 - 2C(k+1)^2 \\ & + Ak^4 + Bk^3 + Ck^2 \end{aligned} \right\} \equiv k^2$$

即

$$12Ak^2 + (24A + 6B)k + (14A + 6B + 2C) \equiv k^2$$

从而  $12A = 1$ ,  $24A + 6B = 0$ ,  $14A + 6B + 2C = 0$

于是  $A = 1/12$

$$B = -4/12$$

$$C = -7A - 3B = 5/12$$

故方程(13.38)的一特解为

$$\frac{1}{12} T^2 (k^4 - 4k^3 + 5k^2) = \frac{1}{12} T^2 k^2 (k^2 - 4k + 5)$$

同(13.36)。

$$\begin{aligned}\text{例5. } x(kT + 2T) + ax(kT + T) + bx(kT) \\ = \mu^k \cos(\omega kT)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y(kT + 2T) + ay(kT + T) + by(kT) \\ = \mu^k \sin(\omega kT)\end{aligned}$$

解 写  $w = x + jy$  则

$$\begin{aligned}w(kT + 2T) + aw(kT + T) + bw(kT) &= \mu^k e^{j\omega kT} \\ &= (\mu e^{j\omega T})^k\end{aligned}$$

显然, 把例1的  $\mu$  换为  $\mu e^{j\omega T}$  就给出这个  $w$  一方程。因此, 如果  $\mu e^{j\omega T}$  不是辅助方程

$$r^2 + ar + b = 0$$

的根, 那末按(13.9),  $w$  一方程的一个特解为

$$\begin{aligned}& \frac{\mu^k e^{j\omega kT}}{\mu^2 e^{2j\omega T} + a\mu e^{j\omega T} + b} \\ &= \frac{\mu^k e^{j\omega kT} (\mu^2 e^{-2j\omega T} + a\mu e^{-j\omega T} + b)}{(\mu^2 e^{2j\omega T} + a\mu e^{j\omega T} + b)(\mu^2 e^{-2j\omega T} + a\mu e^{-j\omega T} + b)} \\ &= \frac{\mu^k [e^{j(k-2)\omega T} + a\mu e^{j(k-1)\omega T} + b e^{jk\omega T}]}{\mu^4 + a^2 \mu^2 + b^2 + 2a\mu(\mu^2 + b)\cos\omega T + 2b\mu^2\cos(2\omega T)}\end{aligned}$$

分开实部及虚部得  $x$  一方程及  $y$  一方程的特解, 依次为

$$\frac{\mu^k \{ \mu^2 \cos[(k-2)\omega T] + a\mu \cos[(k-1)\omega T] + b \cos(k\omega T) \}}{\mu^4 + a^2 \mu^2 + b^2 + 2a\mu(\mu^2 + b)\cos\omega T + 2b\mu^2\cos(2\omega T)}$$

及

$$\frac{\mu^k \{ \mu^2 \sin[(k-2)\omega T] + a\mu \sin[(k-1)\omega T] + b \sin(k\omega T) \}}{\mu^4 + a^2 \mu^2 + b^2 + 2a\mu(\mu^2 + b)\cos\omega T + 2b\mu^2\cos(2\omega T)}$$

若  $\mu e^{j\omega T}$  为辅助方程  $r^2 + ar + b = 0$  的根, 则两根为  $\mu e^{\pm j\omega T}$ 。此时差分方程为

$$w(kT + 2T) - 2\mu \cos \omega T \cdot w(kT + T) + \mu^2 w(kT) = (\mu e^{j\omega T})^k$$

求特解, (13.9) 不能用。我们用 (13.10), 此  $w$  一方程的一个特解为

$$\begin{aligned} & \frac{k(\mu e^{j\omega T})^{k-1}}{2j\mu \sin \omega T} \\ &= \frac{k\mu^{k-2} \{ \cos[(k-1)\omega T] + j \sin[(k-1)\omega T] \}}{2j \sin \omega T} \end{aligned}$$

、 分开实部及虚部得

$$\begin{aligned} & x(kT + 2T) - 2\mu \cos \omega T x(kT + T) + \mu^2 x(kT) \\ &= \mu^k \cos(\omega kT) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{及} \quad & y(kT + 2T) - 2\mu \cos \omega T y(kT + T) + \mu^2 y(kT) \\ &= \mu^k \sin(\omega kT) \end{aligned}$$

的特解依次为

$$\frac{k\mu^{k-2} \sin[(k-1)\omega T]}{2 \sin \omega T} \quad \text{及} \quad -\frac{k\mu^{k-2} \cos[(k-1)\omega T]}{2 \sin \omega T}$$

加上同一补函数

$$\mu^k \{ C_1 \cos(\omega kT) + C_2 \sin(\omega kT) \}$$

即得它们的通解。

$$\text{例6.} \quad x(kT + 2T) + ax(kT + T) + bx(kT) = Tk\mu^k$$

解  $f(kT) = Tk\mu^k$  以  $\alpha$  及  $\beta$  表示  $r^2 + ar + b = 0$  的两根。按 (13.6), 特解为

$$\frac{T}{\alpha - \beta} \{ \mu(\alpha^{k-2} - \beta^{k-2}) + 2\mu^2(\alpha^{k-3} - \beta^{k-3}) + \dots +$$

$$+ (k-2)\mu^{k-2}(a-\beta)\}$$

$$= \frac{T}{a+\beta}(P-Q)$$

其中我们乃令

$$P = \mu a^{k-2} + 2\mu^2 a^{k-3} + \dots + (k-2)\mu^{k-2}a$$

$$Q = \mu \beta^{k-2} + 2\mu^2 \beta^{k-3} + \dots + (k-2)\mu^{k-2}\beta$$

我们把 $P$ 及 $Q$ 化为封闭式。显然

$$P = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} (\mu a^{k-2} + \mu^2 a^{k-3} + \dots + \mu^{k-2}a)$$

故在 $\mu \rightleftharpoons a$ 时

$$\begin{aligned} P &= \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{a\mu^{k-1} - \mu a^{k-1}}{\mu - a} \\ &= \mu \frac{(\mu - a)[(k-1)a\mu^{k-2} - a^{k-1}] - a\mu^{k-1} + \mu a^{k-1}}{(\mu - a)^2} \\ &= \frac{(k-2)a\mu^k - (k-1)a^2\mu^{k-1} + \mu a^k}{(\mu - a)^2} \end{aligned}$$

同样，在 $\mu \rightleftharpoons \beta$ 时，

$$Q = \frac{(k-2)\beta\mu^k - (k-1)\beta^2\mu^{k-1} + \mu\beta^k}{(\mu - \beta)^2}$$

由于含 $a^k$ 及 $\beta^k$ 之项已包含在补函数 $C_1 a^k + C_2 \beta^k$ 中，故可取特解（在 $\mu \rightleftharpoons a$ ， $\mu \rightleftharpoons \beta$ ）

$$\frac{T}{a-\beta} \left\{ (k-2)\mu^k \left[ \frac{a}{(\mu-a)^2} - \frac{\beta}{(\mu-\beta)^2} \right] \right.$$

$$\begin{aligned}
& - (k-1) \mu^{k-1} \left[ \frac{\alpha^2}{(\mu-\alpha)^2} - \frac{\beta^2}{(\mu-\beta)^2} \right] \Big\} \\
& = T \left\{ (k-2) \mu^k \cdot \frac{\mu^2 - \alpha\beta}{(\mu-\alpha)^2 (\mu-\beta)^2} \right. \\
& \quad \left. - (k-1) \mu^{k-1} \cdot \frac{\mu^2 (\alpha+\beta) - 2\mu\alpha\beta}{(\mu-\alpha)^2 (\mu-\beta)^2} \right\} \\
& = T \left\{ (k-2) \mu^k \cdot \frac{\mu^2 - b}{(\mu^2 + a\mu + b)^2} \right. \\
& \quad \left. + (k-1) \mu^{k-1} \cdot \frac{a\mu^2 + 2b\mu}{(\mu^2 + a\mu + b)^2} \right\} \\
& = T \left\{ \frac{k}{\mu^2 + a\mu + b} - \frac{2\mu^2 + a\mu}{(\mu^2 + a\mu + b)^2} \right\} \mu^k \quad (13.39)
\end{aligned}$$

此结果只要求  $\mu^2 + a\mu + b \neq 0$ ，即  $\mu$  不是辅助方程之根。注意， $\alpha - \beta$  最后消去，所以这结果对  $\alpha = \beta$  的情况也适用。

又注意在  $\mu = 1$  时，此为(13.25)

若  $\mu^2 + a\mu + b = 0$ ，则可认为  $\mu = \alpha (\neq \beta)$  此时

$$P = a^{k-1} [1 + 2 + 3 + \cdots + (k-2)] = a^{k-1} (k-1)(k-2)/2$$

$$Q = \frac{(k-2)\beta\alpha^k - (k-1)\beta^2\alpha^{k-1} + \alpha\beta^k}{(\alpha-\beta)^2}$$

补函数仍为  $C_1 \alpha^k + C_2 \beta^k$ ，差分方程右端为  $Tk\alpha^k$ ，不

计  $\frac{T}{\alpha-\beta}(P-Q)$  中含在补函数中之项，可取特解

$$\begin{aligned}
& \frac{T}{a-\beta} \left\{ \frac{1}{2} a^{k-1} (k^2 - 3k) - \frac{k\beta a^k - k\beta^2 a^{k-1}}{(a-\beta)^2} \right\} \\
&= \frac{T}{a-\beta} \left\{ \frac{1}{2} a^{k-1} (k^2 - 3k) - \frac{k\beta a^{k-1}}{a-\beta} \right\} \\
&= T \left\{ \frac{k^2}{2(a-\beta)} - \frac{k(3a-\beta)}{2(a-\beta)^2} \right\} a^{k-1} \quad (13.40)
\end{aligned}$$

注意，若  $\mu = a = 1$ ，则  $\beta = b$ ，此成为(13.26)。

若  $\mu = a = \beta$ ，则差分方程成为

$$x(kT + 2T) - 2ax(kT + T) + a^2x(kT) = Tk a^k$$

补函数为  $(C_1 + C_2 k) a^k$  由(13.8)得特解

$$\begin{aligned}
& T[a(k-2)a^{k-3} + 2a^2(k-3)a^{k-4} + \dots \\
& \quad + (k-3)a^{k-3} \cdot 2a + (k-2)a^{k-2}] \\
&= T a^{k-2} [1 \cdot (k-2) + 2(k-3) + \dots + (k-3)2 + (k-2) \cdot 1]
\end{aligned}$$

在本节例3解之末，我们已得

$$\begin{aligned}
& 1(k-2) + 2(k-3) + \dots + (k-3)2 + (k-2) \cdot 1 \\
&= k(k-1)(k-2)/6 \quad \text{故可有特解}
\end{aligned}$$

$$T a^{k-2} k(k-1)(k-2)/6$$

不计含在补函数中之项，可取特解

$$T a^{k-2} k^2(k-3)/6 \quad (13.41)$$

另解。我们用待定系数法求

$$x(kT + 2T) + ax(kT + T) + bx(kT) = Tk \mu^k \quad (13.42)$$

的特解。由于右端是  $k$  的一次式乘  $\mu^k$ ，我们设特解如  $T(Ak + B)\mu^k$ ，其中  $A$  及  $B$  为待定常数。以之代入(13.42)并消去  $T\mu^k$ ，可有

$$\left. \begin{aligned} & [A(k+2) + B]\mu^2 \\ & + a[A(k+1) + B]\mu \\ & + b[Ak + B] \end{aligned} \right\} \equiv k$$

即  $A(\mu^2 + a\mu + b)k + A(2\mu^2 + a\mu) + B(\mu^2 + a\mu + b) \equiv k$

故  $A(\mu^2 + a\mu + b) = 1 \quad A(2\mu^2 + a\mu) + B(\mu^2 + a\mu + b) = 0$

如果  $\mu^2 + a\mu + b \neq 0$  则  $A = 1/(\mu^2 + a\mu + b)$

$$B = -(2\mu^2 + a\mu)/(\mu^2 + a\mu + b)^2$$

于是得特解

$$T \left[ \frac{k}{\mu^2 + a\mu + b} - \frac{2\mu^2 + a\mu}{(\mu^2 + a\mu + b)^2} \right] \mu^k \quad \text{同(13.39)}.$$

若  $\mu^2 + a\mu + b = 0$ ，则设特解如

$$T(Ak^2 + Bk)\mu^k$$

代入(13.42)并消去  $T\mu^k$ ，可有

$$\left. \begin{aligned} & [A(k+2)^2 + B(k+2)]\mu^2 \\ & + a[A(k+1)^2 + B(k+1)]\mu \\ & + b[Ak^2 + Bk] \end{aligned} \right\} \equiv k$$

即  $A(4\mu^2 + 2a\mu)k + A(4\mu^2 + a\mu) + B(2\mu^2 + a\mu) \equiv k$

故  $A(4\mu^2 + 2a\mu) = 1 \quad A(4\mu^2 + a\mu) + B(2\mu^2 + a\mu) = 0$

于是

$$A = \frac{1}{2\mu(2\mu + a)}$$

$$B = \frac{-(4\mu + a)}{2\mu(2\mu + a)^2} \quad (\text{在 } 2\mu + a \neq 0)$$



特解为  $T\left\{\frac{k^2}{2(2\mu+a)} - \frac{(4\mu+a)k}{2(2\mu+a)^2}\right\}\mu^{k-1}$

显然此同(13.40)。事实上, 条件 $\mu^2 + a\mu + b = 0$ 说明我们可以认为 $\mu = \alpha$ , 而 $2\mu + a \neq 0$ 说明 $2\mu + a = 2\alpha - (\alpha + \beta) = \alpha - \beta \neq 0$ 上之特解可直接写成

$$T\left\{\frac{k^2}{2(\alpha-\beta)} - \frac{(3\alpha-\beta)k}{2(\alpha-\beta)^2}\right\}\alpha^{k-1}$$

此即(13.40)。

若 $\mu^2 + a\mu + b = 0$ 且 $2\mu + a = 0$ , 则 $\mu = \alpha = \beta$ 差分方程为

$$x(kT + 2T) - 2\alpha x(kT + T) + \alpha^2 x(kT) = Tk\alpha^k \quad (13.43)$$

补函数为 $(C_1 + C_2 k)\alpha^k$ , 我们设特解如

$$T(Ak^3 + Bk^2)\alpha^k$$

以之代入(13.43)并消去 $T\alpha^k$ , 可有

$$\left. \begin{aligned} &[A(k+2)^3 + B(k+2)^2]\alpha^2 \\ &- 2\alpha[A(k+1)^3 + B(k+1)^2]\alpha \\ &+ \alpha^2[Ak^3 + Bk^2] \end{aligned} \right\} \equiv k$$

$$\text{即 } 6A\alpha^2 k + (6A + 2B)\alpha^2 \equiv k$$

$$\text{于是 } 6A\alpha^2 = 1, 3A + B = 0, \text{ 从而 } A = \frac{1}{6\alpha^2}, B = -\frac{1}{2\alpha^2}$$

$$\text{特解为 } T\left(\frac{1}{6}k^3 - \frac{1}{2}k^2\right)\alpha^{k-2} = \frac{T}{6}k^2(k-3)\alpha^{k-2} \quad \text{同(13.41).}$$

## § 14 带右端项的 $n$ 阶常系数 线性差分方程的解

考察  $n$  阶常系数线性差分方程（带右端项的）：

$$\begin{aligned} & a_0 x(kT + nT) + a_1 x(kT + nT - T) \\ & + a_2 x(kT + nT - 2T) + \cdots + a_{n-1} x(kT + T) \\ & + a_n x(kT) = f(kT) \end{aligned} \quad (14.1)$$

这方程的通解等于补函数加特解。补函数即此方程右端恒为 0 时的通解。它已在 §11 给出，此处不再重复。我们现在研究如何求方程(14.1)的一个特解。我们仍按(14.1)的各项取  $z$  变换。为简捷起见，也是由于只求特解，我们可取  $x(0) = x(T) = x(2T) = \cdots = x(nT - T) = 0$ 。并取  $a_0 = 1$ （这并不失去其普遍性。如果  $a_0 \neq 1$ ，除以  $a_0$ ）。于是按(14.1)各项取  $z$  变换，并利用 §6 性质（三）的第二式，可有

$$\begin{aligned} & z^n X(z) + a_1 z^{n-1} X(z) + \cdots + a_{n-1} z X(z) \\ & + a_n X(z) = F(z) \end{aligned}$$

于是

$$X(z) = \frac{1}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n} F(z) \quad (14.2)$$

其中  $X(z) = Z[x(kT)]$   $F(z) = Z[f(kT)]$

以  $z_i (i = 1, 2, \cdots)$  表示(14.2)分母的不同的零点，则由 §7 的(7.6)，可见

$$Z^{-1} \left[ \frac{1}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n} \right] = \psi(kT)$$

而

$$\psi(kT) = \begin{cases} \sum_i \operatorname{res} \frac{z^{k-1}}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} & \text{在 } k \geq 1 \\ 0 & \text{在 } k = 0 \end{cases} \quad (14.3)$$

于是(14.2)可写成

$$X(z) = Z[\psi(kT)]Z[f(kT)] = Z[(\psi * f)(kT)]$$

从而

$$x(kT) = (\psi * f)(kT) \quad (14.4)$$

即为所求特解。

我们讨论两个特殊情形。

(i) 设  $z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_0 = 0$  的  $n$  个根  $a_1, a_2, \dots, a_n$  彼此不等

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{a_1} \frac{z^{k-1}}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} &= \frac{z^{k-1}}{(z - a_2) \dots (z - a_n)} \Big|_{z=a_1} \\ &= K_1 a_1^{k-1} \end{aligned}$$

$$K_1 = \frac{1}{(a_1 - a_2) \dots (a_1 - a_n)}$$

$$\operatorname{res}_{a_2} \frac{z^{k-1}}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} = K_2 a_2^{k-1}$$

$$K_2 = \frac{1}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \dots (a_2 - a_n)}$$

.....

$$\operatorname{res}_{a_n} \frac{z^{k-1}}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} = K_n a_n^{k-1}$$

$$K_n = \frac{1}{(a_n - a_1) \cdots (a_n - a_{n-1})}$$

代入(14.3)得

$$\psi(kT) = \begin{cases} K_1 a_1^{k-1} + K_2 a_2^{k-1} + \cdots + K_n a_n^{k-1} & \text{在 } k \geq 1 \\ 0 & \text{在 } k = 0 \end{cases} \quad (14.5)$$

于是由(14.4), 所求特解为

$$\begin{aligned} x(kT) &= (\psi * f)(kT) \\ &= \psi(0)f(kT) + \psi(T)f(kT-T) + \cdots + \\ &\quad + \psi(kT)f(0) \\ &= (K_1 + K_2 + \cdots + K_n)f(kT-T) \\ &\quad + (K_1 a_1 + K_2 a_2 + \cdots + K_n a_n)f(kT-2T) \\ &\quad + \cdots \cdots \cdots \\ &\quad + (K_1 a_1^{k-1} + K_2 a_2^{k-1} + \cdots + K_n a_n^{k-1})f(0) \\ &= \sum_{i=1}^n K_i \{ (kT-T) + a_i f(kT-2T) \\ &\quad + a_i^2 f(kT-3T) + \cdots + a_i^{k-1} f(0) \} \end{aligned} \quad (14.6)$$

注意, (14.5) 中的  $\psi(kT)$  亦可借助于部分分式得出。

事实上

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n} &= \frac{1}{(z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_n)} \\ &= \frac{K_1}{z - a_1} + \frac{K_2}{z - a_2} + \cdots + \frac{K_n}{z - a_n} \end{aligned}$$

其中  $K_1, K_2, \cdots, K_n$  的表达式如上。由 §12 的(12.4)可有

$$Z^{-1}\left[\frac{K_1}{z-a_1}\right]=\begin{cases} K_1 a_1^{k-1} & \text{在 } k \geq 1 \\ 0 & \text{在 } k = 0 \end{cases}$$

对于其他各项亦有类似结果。相加即得  $\psi(kT)$  如(14.5)

$$(ii) \quad z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = (z-a)^n$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{res}_{z=a} \frac{z^{k-1}}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} \\ &= \operatorname{res}_{z=a} \frac{z^{k-1}}{(z-a)^n} = \frac{1}{(n-1)!} \left[ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z^{k-1}) \right]_{z=a} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{在 } k = 1, 2, \dots, n-1 \\ \frac{(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)}{(n-1)!} a^{k-n} & \text{在 } k \geq n \end{cases} \end{aligned}$$

由(14.3)得

$$\psi(kT) = \begin{cases} 0, & \text{在 } k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ \frac{(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)}{(n-1)!} a^{k-n} & \text{在 } k \geq n \end{cases} \quad @$$

此  $\psi(kT)$  亦可借助于  $z$  的负幂级数得出:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} \\ &= \frac{1}{(z-a)^n} = \frac{1}{z^n} \left( 1 - \frac{a}{z} \right)^{-n} \\ &= \frac{1}{z^n} \left( 1 + n \frac{a}{z} + \frac{n(n+1)}{2!} \frac{a^2}{z^2} + \dots \right. \\ & \quad \left. + \frac{n(n+1)\dots(n+r-1)}{r!} \frac{a^r}{z^r} + \dots \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{z^n} + n \frac{a}{z^{n+1}} + \frac{n(n+1)}{2!} \frac{a^2}{z^{n+2}} + \dots$$

$$+ \frac{n(n+1)\cdots(n+r-1)}{r!} \frac{a^r}{z^{n+r}} + \dots$$

显然, 在  $k = 0, 1, \dots, n-1$  时, 此展式中  $1/z^k$  之系数均为 0, 在  $k = n$  时,  $1/z^k$  之系数为 1, 在  $k > n$  时, 含  $1/z^k$  之项出现于  $r = k - n$  时故  $1/z^k$  之系数为

$$\frac{n(n+1)\cdots(k-1)}{(k-n)!} a^{k-n} = \frac{(k-1)(k-2)\cdots n}{(k-n)!} a^{k-n}$$

故

$$\psi(kT) = \begin{cases} 0 & \text{在 } k = 0, 1, \dots, n-1 \\ 1 & \text{在 } k = n \\ \frac{(k-1)(k-2)\cdots n}{(k-n)!} & \text{在 } k \geq n+1 \end{cases} \quad \textcircled{b}$$

容易证明⑥及④恒同, 事实上, 在  $k \geq n+1$  时,

$$\begin{aligned} & \frac{(k-1)(k-2)\cdots n}{(k-n)!} \\ &= \frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)(k-n)\cdots(n+1)n}{1 \cdot 2 \cdots (n-1)n(n+1)\cdots(k-n)} \\ &= \frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{(n-1)!} \quad [\text{即⑥恒同于④}] \quad \textcircled{c} \end{aligned}$$

注意⑥亦可写成

$$\psi(kT) = \begin{cases} 0 & \text{在 } k = 0, 1, \dots, n-1 \\ 1 & \text{在 } k = n \\ \frac{n(n+1)\cdots(k-1)}{(k-n)!} a^{k-n} & \text{在 } k \geq n+1 \end{cases}$$

利用  $\psi(kT)$  的这个形式, 最后得特解

$$\begin{aligned}
 x(kT) &= (\psi \cdot f)(kT) \\
 &= \psi(0)f(kT) + \psi(T)f(kT-T) \\
 &\quad + \cdots + \psi(kT)f(0) \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{在 } k = 0, 1, \dots, n-1 \\ f(kT-nT) + na f(kT-nT-T) \\ \quad + \frac{n(n+1)}{2!} a^2 f(kT-nT-2T) + \cdots \\ \quad + \frac{n(n+1)\cdots(k-1)}{(k-n)!} a^{k-n} f(0) & \text{在 } k \geq n \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{14.7}$$

$$\begin{aligned}
 \text{例1. } x(kT+nT) + a_1 x(kT+nT-T) + \cdots \\
 + a_{n-1} x(kT+T) + a_n x(kT) = \mu^k
 \end{aligned}
 \tag{14.8}$$

并且辅助方程的  $n$  个根  $a_1, a_2, \dots, a_n$  彼此不等。

解  $f(kT) = \mu^k$  代入(14.6)可得特解

$$\begin{aligned}
 x(kT) &= \sum_{i=1}^n K_i (\mu^{k-1} + a_i \mu^{k-2} + a_i^2 \mu^{k-3} \\
 &\quad + \cdots + a_i^{k-1}) \\
 &= \sum_{i=1}^n K_i \frac{\mu^k - a_i^k}{\mu - a_i} \quad \text{在 } \mu \neq a_i \text{ 时}
 \end{aligned}$$

条件  $\mu \neq a_i$  意味着  $\mu$  不是辅助方程之根, 即

$$\mu^n + a_1 \mu^{n-1} + \cdots + a_n \neq 0$$

由于含  $a_i^k$  之项已包含在补函数中, 故在  $\mu \neq a_i$  时, 可取特解

$$\sum_{i=1}^n K_i \frac{\mu^k}{\mu - a_i} = \left( \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{\mu - a_i} \right) \mu^k$$

$$= \frac{\mu^k}{\mu^n + a_1 \mu^{n-1} + \cdots + a_n} \quad (14.9)$$

（左端的和式是右端的部分分式展开式）。

另解. 由(14.9)的启发, 我们设差分方程(14.8)有一特解如  $A\mu^k$ , 其中  $A$  为待定常数。代入(14.8), 可有

$$A(\mu^{k+n} + a_1 \mu^{k+n-1} + \cdots + a_{n-1} \mu^{k+1} + a_n \mu^k) = \mu^k$$

$$\text{即} \quad A(\mu^n + a_1 \mu^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \mu + a_n) = 1 \quad (14.10)$$

$$\text{如果} \quad P(\mu) \equiv \mu^n + a_1 \mu^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \mu + a_n \neq 0 \quad (14.11)$$

我们可自(14.10)解得  $A = 1/P(\mu)$ , 从而得特解

$$\mu^k/P(\mu) \quad (14.12)$$

同(14.9)。条件 (14.11) 表明  $\mu$  不是辅助方程  $P(z) = 0$  之根。注意, (14.12)的得出不需要假定  $P(z) = 0$  的  $n$  个根全不相等, 而(14.9)则是在这种假定下得到的。

如果  $\mu$  为  $P(z)$  的单根 (一重根), 即  $P(\mu) = 0$ , 但

$$P'(\mu) = n\mu^{n-1} + (n-1)a_1\mu^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \neq 0$$

则(14.10)不能成立。我们可设(14.8)的特解为  $Ak\mu^k$ , 其中  $A$  为待定常数。以之代入(14.8), 得

$$A[(k+n)\mu^{k+n} + a_1(k+n-1)\mu^{k+n-1} + \cdots + a_{n-1}(k+1)\mu^{k+1} + a_n k \mu^k] = \mu^k$$

$$\text{即} \quad A[kP(\mu) + \mu P'(\mu)] = 1 \quad \text{亦即} \quad A\mu P'(\mu) = 1$$

$$\text{从而} \quad A = \frac{1}{\mu P'(\mu)}$$

$$\text{于是得特解} \quad \frac{k \mu^{k-1}}{P'(\mu)} \quad (14.13)$$

如果  $\mu$  为辅助方程  $P(z) = 0$  的二重根, 即

$$P(\mu) = \mu^n + a_1 \mu^{n-1} + \cdots + a_{n-2} \mu^2 + a_{n-1} \mu + a_n = 0$$



$$P'(\mu) = n\mu^{n-1} + (n-1)a_1\mu^{n-2} + \dots$$

$$+ 2a_{n-2}\mu + a_{n-1} = 0$$

但 
$$P''(\mu) = n(n-1)\mu^{n-2} + (n-1)(n-2)a_1\mu^{n-3} + \dots$$
  

$$+ 2a_{n-2} \neq 0$$

则(14.13)没有意义。我们设(14.8)的特解为  $Ak^2\mu^k$ ，其中  $A$  为待定常数。以此解代入(14.8)，可有

$$A[(k+n)^2\mu^{k+n} + a_1(k+n-1)^2\mu^{k+n-1} + \dots$$

$$+ a_{n-2}(k+2)^2\mu^{k+2} + a_{n-1}(k+1)^2\mu^{k+1}$$

$$+ a_n k^2\mu^k] = \mu^k$$

消去  $\mu^k$ ，可有

$$A[k^2P(\mu) + 2k\mu P'(\mu) + \{n^2\mu^n + a_1(n-1)^2\mu^{n-1} + \dots$$

$$+ a_{n-2}2^2\mu^2 + a_{n-1}1^2\mu\}] = 1$$

即 
$$A[k^2P(\mu) + 2k\mu P'(\mu) + \{\mu P'(\mu)$$
  

$$+ \mu^2 P''(\mu)\}] = 1$$

亦即 
$$A[k^2P(\mu) + (2k+1)\mu P'(\mu) + \mu^2 P''(\mu)] = 1$$

但题设  $P(\mu) = 0$ ， $P'(\mu) = 0$ ， $P''(\mu) \neq 0$ ，故

$$A = \frac{1}{\mu^2 P''(\mu)}$$

特解为 
$$\frac{k^2 \mu^{k-2}}{P''(\mu)} \quad (14.14)$$

注意：取  $n = 2$ ，这里的(14.12)，(14.13)，(14.14)，即分别成为 §13 中的(13.9)末项，(13.10)末项，(13.15)末项。

例2. 
$$x(kT + nT) + a_1 x(kT + nT - T) + \dots$$

$$+ a_{n-1} x(kT + T) + a_n x(kT) = \mu^k$$

并且辅助方程的  $n$  个根全相等为  $\alpha$ 。

解 辅助方程为  $P(z) \equiv (z-a)^n = 0$

施用  $z$  变换于所给方程, 并假定  $x(0) = x(T) = \dots = x(nT - T) = 0$  可有

$$(z-a)^n X(z) = Z[\mu^k] = z/(z-\mu)$$

于是

$$X(z) = \frac{z}{(z-a)^n(z-\mu)}$$

若  $\mu \neq a$  则

$$\begin{aligned} Z^{-1}[X(z)] &= \operatorname{res}_\mu \left[ \frac{z^k}{(z-a)^n(z-\mu)} \right] \\ &\quad + \operatorname{res}_a \left[ \frac{z^k}{(z-a)^n(z-\mu)} \right] \\ &= \frac{z^n}{(z-a)^n} \Big|_{z=\mu} \\ &\quad + \frac{1}{(n-1)!} \left[ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left( \frac{z^k}{z-\mu} \right) \right] \dots \\ &= \frac{\mu^k}{(\mu-a)^n} + \text{补函数中之项} \end{aligned}$$

故可取特解  $\frac{\mu^k}{(\mu-a)^n} = \frac{\mu^k}{P(\mu)}$  同例 1 的(14.12).

若  $\mu = a$ , 则

$$X(z) = \frac{z}{(z-a)^{n+1}}$$

故得特解

$$\begin{aligned}
x(kT) &= Z^{-1}[X(z)] \\
&= Z^{-1}\left[\frac{z}{(z-a)^{n+1}}\right] \\
&= \operatorname{res}_a \left[ \frac{z^k}{(z-a)^{n+1}} \right] \\
&= \frac{1}{n!} \left[ \frac{d^n}{dz^n} (z^k) \right]_{z=a} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{在 } k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!} a^{k-n} & \text{在 } k \geq n \end{cases}
\end{aligned} \tag{14.15}$$

注意，此情形属于上述特殊情形(ii)， $f(kT) = a^k$  特解也可由(14.7)给出为

$$x(kT) = \begin{cases} 0 & \text{在 } k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ \left[ 1 + n + \frac{n(n+1)}{2!} + \dots + \frac{n(n+1)\cdots(k-1)}{(k-n)!} \right] a^{k-n} & \text{在 } k \geq n \end{cases}$$

我们证明：此式可化成(14.15)，即有

$$\begin{aligned}
&1 + n + \frac{n(n+1)}{2!} + \dots + \frac{n(n+1)\cdots(k-1)}{(k-n)!} \\
&= \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!} \quad (k \geq n) \quad (*)
\end{aligned}$$

事实上， $k = n$ ，右端 =  $\frac{n(n-1)\cdots 1}{n!} = 1$ ，左端只有第一项1。

$$k = n+1, \quad 1 + n = \frac{(n+1)n\cdots 2}{n!}$$

$$k = n+2, \quad 1+n+\frac{n(n+1)}{2!} = \frac{(n+2)(n+1)n\cdots 3}{n!}$$

$$= \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

我们用归纳法完成证明。将上之(\*)两端各加

$$\frac{n(n+1)\cdots k}{(k-n+1)!}$$

可有  $1+n+\frac{n(n+1)}{2!} + \cdots + \frac{n(n+1)\cdots(k-1)}{(k-n)!}$

$$+ \frac{n(n+1)\cdots k}{(k-n+1)!}$$

$$= \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!} + \frac{n(n+1)\cdots k}{(k-n+1)!}$$

$$= \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!} + \frac{k(k-1)\cdots(k-n+2)}{(n-1)!}$$

(由情形(ii)的©)

$$= \frac{(k+1)k(k-1)\cdots(k-n+2)}{n!}$$

将此等式左边的  $k$  换为  $k+1$ , 即得(\*), 故得证。

例3.  $x(kT+nT) + a_1 x(kT+nT-T) + \cdots$   
 $+ a_{n-1} x(kT+T) + a_n x(kT) = kT$

解  $f(kT) = kT$ 。假定辅助方程的  $n$  个根  $a_i (i=1, 2, \cdots, n)$  全不相等。应用(14.6)可有特解

$$T \sum_{i=1}^n K_i \{ (k-1) + a_i(k-2) + a_i^2(k-3) + \cdots + a_i^{k-2} 1 \}$$

我们把{ }中的式子化为封闭式。写

$$S = (k-1) + a(k-2) + a^2(k-3) + \cdots + a^{k-2}1$$

$$\text{则 } aS = a(k-1) + a^2(k-2) + \cdots + a^{k-2} \cdot 2 + a^{k-1}$$

$$\text{故 } (1-a)S = k-1-a-a^2-\cdots-a^{k-2}-a^{k-1}$$

$$\text{如果 } a \neq 1 \text{ 则 } (1-a)S = k - \frac{1-a^k}{1-a}$$

$$\text{从而 } S = \frac{k}{1-a} - \frac{1-a^k}{(1-a)^2}$$

于是在  $a_i \neq 1$  时, 可有特解

$$T \sum_{i=1}^n K_i \left\{ \frac{k}{1-a_i} - \frac{1-a_i^k}{(1-a_i)^2} \right\}$$

由于含  $a_i^k$  之项已包括在补函数中, 故可取特解 (在  $a_i \neq 1$  时)

$$\begin{aligned} & T \sum_{i=1}^n K_i \left\{ \frac{k}{1-a_i} - \frac{1}{(1-a_i)^2} \right\} \\ &= T \left\{ k \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{1-a_i} - \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{(1-a_i)^2} \right\} \end{aligned} \quad (14.16)$$

条件  $a_i = 1$  表明 1 不是辅助方程

$$P(z) \equiv z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

的根, 即

$$P(1) = 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \neq 0 \quad (14.17)$$

在此条件下, 我们能将特解(14.16)用系数  $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$  表出。注意  $K_i$  是

$$\frac{1}{P(z)} = \frac{1}{(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_n)}$$

展开为部分分式和的系数 (在所有  $a_i$  全不相等的情形), 即

$$\sum_{i=1}^n \frac{K_i}{z-a_i} = \frac{1}{P(z)}$$

将此恒等式对  $z$  求导数, 并变号, 可有

$$\sum_{i=1}^n \frac{K_i}{(z - a_i)^2} = \frac{P'(z)}{[P(z)]^2}$$

于此两恒等式中令  $z = 1$ , 可有

$$\sum_{i=1}^n \frac{K_i}{1 - a_i} = \frac{1}{P(1)} \quad (a)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{K_i}{(1 - a_i)^2} = \frac{P'(1)}{[P(1)]^2} \quad (b)$$

其中  $P(1)$  如(14.17), 而

$$\begin{aligned} P'(1) &= [nz^{n-1} + a_1(n-1)z^{n-2} \\ &\quad + a_2(n-2)z^{n-3} + \cdots + a_{n-1}]_{z=1} \\ &= n + a_1(n-1) + a_2(n-2) + \cdots + a_{n-1} \end{aligned} \quad (14.18)$$

将(a).(b)代入(14.16)得特解

$$T \left\{ \frac{k}{P(1)} - \frac{P'(1)}{[P(1)]^2} \right\} \quad (14.19)$$

另解 用待定系数法。设特解为  $\Gamma(Ak + B)$ , 其中  $A$  及  $B$  为待定常数。代入原方程, 可有

$$\begin{aligned} [A(k+n) + B] + a_1[A(k+n-1) + B] \\ + a_2[A(k+n-2) + B] + \cdots \\ + a_{n-1}[A(k+1) + B] + a_n[Ak + B] \equiv k \end{aligned}$$

即

$$AkP(1) + AP'(1) + BP(1) \equiv k$$

其中  $P(1)$  如(14.17),  $P'(1)$  如(14.18)。于是

$$AP(1) = 1 \quad AP'(1) + BP(1) = 0$$

如果  $P(1) \neq 0$ , 可有

$$A = \frac{1}{P(1)} \quad B = -\frac{P'(1)}{[P(1)]^2}$$

特解为

$$T(Ak + B) = T \left\{ \frac{k}{P(1)} - \frac{P'(1)}{[P(1)]^2} \right\}$$

同(14.19)。特别,  $n=2$ , 此成为(13.25)。

如果  $P(1) = 0$ , 则设特解  $T(Ak^2 + Bk)$ ,  $A$  及  $B$  为待定常数。代入所给方程可有

$$\begin{aligned} & A(k+n)^2 + B(k+n) \\ & + a_1[A(k+n-1)^2 + B(k+n-1)] \\ & + a_2[A(k+n-2)^2 + B(k+n-2)] \\ & + \dots\dots\dots \\ & + a_{n-1}[A(k+1)^2 + B(k+1)] \\ & + a_n[Ak^2 + Bk] \\ & \equiv k \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} & Ak^2P(1) + 2AkP'(1) + A[n^2 + a_1(n-1)^2 \\ & + a_2(n-2)^2 + \dots + a_{n-1}1^2] + BkP(1) + BP'(1) \\ & \equiv k \end{aligned}$$

计及条件  $P(1) = 0$ , 可见必有

$$\begin{aligned} & 2AP'(1) = 1 \\ & A[n^2 + a_1(n-1)^2 + a_2(n-2)^2 + \dots + a_{n-1}] \\ & + BP'(1) = 0 \end{aligned}$$

如果  $P'(1) \neq 0$ , 则可解得

$$A = \frac{1}{2P'(1)}$$

$$B = - \frac{n^2 + a_1(n-1)^2 + a_2(n-2)^2 + \cdots + a_{n-1}}{2[P'(1)]^2}$$

显然

$$\begin{aligned} & n^2 + a_1(n-1)^2 + a_2(n-2)^2 + \cdots + a_{n-1} \\ &= \left[ \frac{d}{dz} \{zP'(z)\} \right]_{z=1} \\ &= [zP''(z) + P'(z)]_{z=1} \\ &= P''(1) + P'(1) \end{aligned}$$

将此结果代入  $B$  中, 可见特解  $T(Ak^2 + Bk)$  成为

$$T \left\{ \frac{k^2}{2P'(1)} - \frac{P''(1) + P'(1)}{2[P'(1)]^2} k \right\} \quad (14.20)$$

其中  $P'(1)$  如(14.18), 而

$$\begin{aligned} P''(1) &= n(n-1) + a_1(n-1)(n-2) \\ &\quad + a_2(n-2)(n-3) + \cdots + a_{n-2} \cdot 2 \end{aligned} \quad (14.21)$$

特别,  $n = 2$ , 特解(14.20)给出(13.26)。

如果  $P(1) = 0$  且  $P'(1) = 0$ , 则可设特解

$$T(Ak^3 + Bk^2)$$

其中  $A$  及  $B$  为待定常数。代入所给方程, 并消去  $T$ , 可有

$$\begin{aligned} & A(k+n)^3 + B(k+n)^2 \\ &+ a_1[A(k+n-1)^3 + B(k+n-1)^2] \\ &+ a_2[A(k+n-2)^3 + B(k+n-2)^2] \\ &+ \cdots \cdots \cdots \\ &+ a_{n-1}[A(k+1)^3 + B(k+1)^2] \\ &+ a_n[Ak^3 + Bk^2] \\ &\equiv k \end{aligned}$$



即

$$\begin{aligned}
 & Ak^3P(1) + 3Ak^2P'(1) \\
 & 3Ak[n^2 + a_1(n-1)^2 + a_2(n-2)^2 + \cdots + a_{n-1}] \\
 & + A[n^3 + a_1(n-1)^3 + a_2(n-2)^3 + \cdots \\
 & + a_{n-1}1^3] + Bk^2P(1) + 2BkP'(1) \\
 & + B[n^2 + a_1(n-1)^2 + a_2(n-2)^2 + \cdots + a_{n-1}] \\
 & \equiv k
 \end{aligned}$$

已证

$$\begin{aligned}
 & n^2 + a_1(n-1)^2 + a_2(n-2)^2 + \cdots + a_{n-1} \\
 & = P''(1) + P'(1)
 \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}
 & n^3 + a_1(n-1)^3 + a_2(n-2)^3 + \cdots + a_{n-1} \\
 & = \left( \frac{d}{dz} \left\{ z \frac{d}{dz} [zP'(z)] \right\} \right) \Big|_{z=1} \\
 & = \left( \frac{d}{dz} \{ z^2P''(z) + zP'(z) \} \right) \Big|_{z=1} \\
 & = (z^2P'''(z) + 3zP''(z) + P'(z)) \Big|_{z=1} \\
 & = P'''(1) + 3P''(1) + P'(1)
 \end{aligned}$$

故此等式化成

$$\begin{aligned}
 & Ak^3P(1) + 3Ak^2P'(1) + 3Ak[P''(1) + P'(1)] \\
 & + A[P'''(1) + 3P''(1) + P'(1)] \\
 & + Bk^2P(1) + 2BkP'(1) + B[P''(1) + P'(1)] \\
 & \equiv k
 \end{aligned}$$

计及  $P(1) = 0$ ,  $P'(1) = 0$ , 即为

$$3AkP''(1) + A[P'''(1) + 3P''(1)] + BP''(1) \equiv k$$

故  $3AP''(1) = 1$   $A[P'''(1) + 3P''(1)] + BP''(1) = 0$

如果  $P''(1) \neq 0$ , 则可有

$$A = \frac{1}{3P''(1)} \quad B = -\frac{P'''(1) + 3P''(1)}{3[P''(1)]^2}$$

所求特解为

$$\begin{aligned} & T(Ak^3 + Bk^2) \\ &= T\left\{\frac{k^3}{3P''(1)} - \frac{P'''(1) + 3P''(1)}{3[P''(1)]^2} k^2\right\} \quad (14.22) \end{aligned}$$

其中  $P''(1)$  如(14.21), 而

$$\begin{aligned} P'''(1) &= n(n-1)(n-2) + a_1(n-1)(n-2)(n-3) \\ &\quad + \cdots + a_{n-3}n! \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{例4. } x(kT + nT) + a_1 x(kT + nT - T) + \cdots \\ + a_{n-1} x(kT + T) + a_n x(kT) = kT \end{aligned}$$

同例3, 但假定辅助方程的  $n$  个根全相等为  $a$ 。

解 辅助方程为  $P(z) \equiv (z-a)^n = 0$ 。就所给方程取  $z$  变换并假定  $x(0) = x(T) = \cdots = x(nT - T) = 0$ , 则有

$$P(z) X(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

于是

$$X(z) = \frac{Tz}{(z-a)^n(z-1)^2}$$

若  $a \neq 1$ , 则

$$\begin{aligned} Z^{-1}[X(z)] &= \text{res} \left[ \frac{Tz^k}{(z-a)^n(z-1)^2} \right] \\ &\quad + \text{res} \left[ \frac{Tz^k}{(z-a)^n(z-1)^2} \right] \\ &= \frac{T}{(n-1)!} \left[ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \frac{z^k}{(z-1)^2} \right] \dots \end{aligned}$$

$$+ T \left[ \frac{d}{dz} \frac{z^k}{(z-a)^n} \right]_{z=1}$$

显然末端第一项的结果完全包括在补函数

$$a^k(C_1 + C_2 k + \cdots + C_n k^{n-1})$$

中，末端第二项等于

$$T \left[ \frac{k}{(1-a)^n} - \frac{n}{(1-a)^{n+1}} \right] = T \left\{ \frac{k}{P(1)} - \frac{P'(1)}{[P(1)]^2} \right\}$$

即可取为特解，其形式同上例(14.19)。

若  $a = 1$ ，则

$$X(z) = \frac{Tz}{(z-1)^{n+2}}$$

$$Z^{-1}[X(z)] = \operatorname{res}_1 \frac{Tz^k}{(z-1)^{n+2}}$$

$$= \frac{T}{(n+1)!} \left[ \frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} (z^k) \right]_{z=1}$$

$$= \frac{T}{(n+1)!} k(k-1)(k-2)\cdots(k-n)$$

(在  $k = 0, 1, 2, \cdots, n, n+1, n+2, \cdots$ )

即为一特解。由于补函数此时为  $C_1 + C_2 k + \cdots + C_n k^{n-1}$ ，故舍去上式中含在补函数中之项，可取特解

$$\frac{T}{(n+1)!} \{k^{n+1} - (1+2+\cdots+n)k^n\}$$

$$= \frac{T}{(n+1)!} \left\{ k^{n+1} - \frac{1}{2}n(n+1)k^n \right\}$$

特别， $n = 2$ ，给出  $T(k^3 - 3k^2)/6$ ，同 §13 例 3 各解

末。

$$\text{例5. } x(kT + nT) + a_1 x(kT + nT - T) + \dots$$

$$a_n x(kT) = \cos(k\omega T)$$

$$y(kT + nT) + a_1 y(kT + nT - T) + \dots$$

$$a_n y(kT) = \sin(k\omega T)$$

解 写  $w = x + jy$ , 则

$$w(kT + nT) + a_1 w(kT + nT - T) + \dots$$

$$+ a_n w(kT) = e^{jk\omega T}$$

若  $e^{j\omega T}$  不是辅助方程

$$P(z) \equiv z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

之根, 则由(14.12), 可得  $w$  一方程的特解

$$\frac{e^{jk\omega T}}{P(e^{j\omega T})} = \frac{e^{jk\omega T}(e^{-jn\omega T} + a_1 e^{-j(n-1)\omega T} + \dots$$

$$+ \frac{a_{n-1} e^{-j\omega T} + a_n)}{P(e^{j\omega T})P(e^{-j\omega T})}$$

$$= \frac{e^{j(k-n)\omega T} + a_1 e^{j(k-n+1)\omega T} + \dots}{|P(e^{j\omega T})|^2}$$

$$+ \frac{a_{n-1} e^{j(k-1)\omega T} + a_n e^{jk\omega T}}{|P(e^{j\omega T})|^2}$$

分开实部及虚部即得  $x$ -方程及  $y$ -方程的特解:

$$\frac{\cos[(k-n)\omega T] + a_1 \cos[(k-n+1)\omega T] + \dots + a_n \cos(k\omega T)}{|P(e^{j\omega T})|^2}$$

及

$$\frac{\sin[(k-n)\omega T] + a_1 \sin[(k-n+1)\omega T] + \dots + a_n \sin(k\omega T)}{|P(e^{j\omega T})|^2}$$

## § 15 向量型一阶差分方程的解

在 §1 中, 我们曾将一个  $n$  阶常系数线性差分方程化为一组  $n$  个一阶线性差分方程, 其型如 §1 的 (1.10), 它是向量型一阶差分方程, 类似于 §12 的 (12.1)。我们可用类似于解 (12.1) 的方法解这个向量型一阶差分方程。其实我们能用类似于解 (12.1) 的方法解较 (1.10) 更为广泛的向量型一阶线性差分方程:

$$\vec{x}(kT+T) = \vec{A} \vec{x}(kT) + \vec{B} \vec{u}(kT) \quad (15.1)$$

其中

$$\vec{x}(kT) = \begin{pmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ \dots\dots\dots \\ x_n(kT) \end{pmatrix} \text{ 是 } n \times 1 \text{ 状态向量。} \quad (15.2)$$

$$\vec{u}(kT) = \begin{pmatrix} u_1(kT) \\ u_2(kT) \\ \dots\dots\dots \\ u_p(kT) \end{pmatrix} \text{ 是 } p \times 1 \text{ 输入向量} \quad (15.3)$$

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ 是 } n \times n \text{ 常数矩阵} \quad (15.4)$$

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} \text{ 是 } n \times p \text{ 常数矩阵} \quad (15.5)$$

当然(15.1)等价于一组  $n$  个一阶常系数线性差分方程。  
我们用  $z$  变换来解(15.1)。

按(15.1)各项取 $z$ 变换, 并利用 §6 性质(三)的第二条, 可有

$$z [\vec{X}(z) - \vec{x}(0)] = \vec{A} \vec{X}(z) + \vec{B} \vec{U}(z) \quad (15.6)$$

其中

$$\vec{X}(z) = \begin{pmatrix} X_1(z) = Z[x_1(kT)] \\ X_2(z) = Z[x_2(kT)] \\ \dots\dots\dots \\ X_p(z) = Z[x_n(kT)] \end{pmatrix}$$
 是  $n \times 1$  状态变换向量

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \dots\dots\dots \\ x_n(0) \end{pmatrix} \text{ 是 } n \times 1 \text{ 初始条件向量}$$

$$\vec{U}(z) = \begin{pmatrix} U_1(z) = Z[u_1(kT)] \\ U_2(z) = Z[u_2(kT)] \\ ..... \\ U_p(z) = Z[u_p(kT)] \end{pmatrix}$$

是  $p \times 1$  输入变换向量

以  $I$  表单位矩阵, 则(15.6)可写成

$$(zI - A) \vec{X}(z) = z \vec{x}(0) + \vec{B} \vec{U}(z)$$

于是

$$\vec{X}(z) = (z \vec{I} - \vec{A})^{-1} z \vec{x}(0) + (z \vec{I} - \vec{A})^{-1} \vec{B} \vec{U}(z) \quad (15.7)$$

逆矩阵  $(z \vec{I} - \vec{A})^{-1} z = z (z \vec{I} - \vec{A})^{-1}$  是  $n \times n$  方阵，其元素是  $z$  的有理分式，分子及分母的次数一般均为  $n$  次，各元素均有反  $z$  变换，因而矩阵  $(z \vec{I} - \vec{A})^{-1} z$  必为某函数矩阵  $\vec{\varphi}(kT)$  的  $z$  变换，即有  $n \times n$  矩阵  $\vec{\varphi}(kT)$  使

$$(z \vec{I} - \vec{A})^{-1} z = Z[\vec{\varphi}(kT)] \quad (15.8)$$

于是按 §6 性质 (三) 的第一式可有

$$z^{-1}(z \vec{I} - \vec{A})^{-1} z = Z[\vec{\varphi}(kT - T)] \quad \text{在 } k \geq 1$$

$$\text{即 } (z \vec{I} - \vec{A})^{-1} = Z[\vec{\varphi}(kT - T)] \quad \text{在 } k \geq 1$$

并且在  $k = 0$  时, 我们应把右端  $\vec{\varphi}(-T)$  换为 0 (方阵)

因此

$$\vec{\psi}(kT) = \begin{cases} \vec{\varphi}(kT - T) & \text{在 } k \geq 1 \\ 0 \text{ (方阵)} & \text{在 } k = 0 \end{cases}$$

$$\text{则 } (z \vec{I} - \vec{A})^{-1} = Z[\vec{\psi}(kT)]$$

$$\text{又 } \vec{B} \vec{U}(z) = \vec{B} Z[\vec{u}(kT)]$$

故由卷积定理 (§6 的 (t)), 可有

$$\begin{aligned} & (z \vec{I} - \vec{A})^{-1} \vec{B} \vec{U}(z) \\ &= Z[(\vec{\psi} * \vec{B} \vec{u})(kT)] \\ &= Z[\vec{\psi}(T) \vec{B} \vec{u}(kT - T) + \vec{\psi}(2T) \vec{B} \vec{u}(kT - 2T) \\ & \quad + \cdots + \vec{\psi}(kT) \vec{B} \vec{u}(0)] \\ &= Z[\vec{\varphi}(0) \vec{B} \vec{u}(kT - T) + \vec{\varphi}(T) \vec{B} \vec{u}(kT - 2T) \\ & \quad + \cdots + \vec{\varphi}(kT - T) \vec{B} \vec{u}(0)] \\ &= Z[\sum_{i=0}^{k-1} \vec{\varphi}(iT) \vec{B} \vec{u}(kT - iT - T)] \quad (15.9) \end{aligned}$$

以 (15.8) 及 (15.9) 代入 (15.7) 并取反  $z$  变换, 即得 (15.1) 的解:

$$\begin{aligned} \vec{x}(kT) &= \vec{\varphi}(kT) \vec{x}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \vec{\varphi}(iT) \vec{B} \vec{u}(kT - iT - T) \\ &= \vec{\varphi}(kT) \vec{x}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \vec{\varphi}(kT - iT - T) \vec{B} \vec{u}(iT) \end{aligned} \quad (15.10)$$

其中  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$  (15.10) 称状态过渡方程。

## § 16 算子法解常系数线性差分方程

类似于用求导算子  $D$  解常系数线性微分方程，我们可用平移算子  $E$  来解常系数线性差分方程。平移算子  $E$  的定义由下式给出；

$$E x(kT) = x(kT + T) \quad (16.1)$$

据此，可有

$$E^2 x(kT) = EE x(kT) = E x(kT + T) = x(kT + 2T)$$

$$E^3 x(kT) = EE^2 x(kT) = E x(kT + 2T) = x(kT + 3T)$$

.....

$$\begin{aligned} E^n x(kT) &= EE^{n-1} x(kT) = E x(kT + nT - T) \\ &= x(kT + nT) \end{aligned}$$

于是差分方程

$$\begin{aligned} a_0 x(kT + nT) + a_1 x(kT + nT - T) + \cdots \\ + a_{n-1} x(kT + T) + a_n x(kT) \\ = f(kT) \end{aligned} \quad (16.2)$$

可写成

$$\begin{aligned} a_0 E^n x(kT) + a_1 E^{n-1} x(kT) + \cdots + a_{n-1} E x(kT) \\ + a_n x(kT) = f(kT) \end{aligned}$$

更进一步写成

$$(a_0 E^n + a_1 E^{n-1} + \cdots + a_{n-1} E + a_n) x(kT) = f(kT) \quad (16.3)$$

方程(16.3)左端  $x(kT)$  的“系数”是算子  $E$  的  $n$  次降幂多项式，记如  $P(E)$ ，即

$$P(E) \equiv a_0 E^n + a_1 E^{n-1} + \cdots + a_{n-1} E + a_n \quad (16.4)$$





现在定义  $\frac{1}{P(E)}$ 。作为定义,  $\frac{1}{P(E)}$  是一个算子, 使

$$P(E) \frac{1}{P(E)} f(kT) = f(kT) \quad (16.8)$$

据此, 方程(16.5)的解可写成

$$x(kT) = \frac{1}{P(E)} f(kT) \quad (16.9)$$

理由是: 根据(16.8) 将 (16.9) 两端均从左方施用  $P(E)$  即回到(16.5)。因此两方程 (16.5) 及 (16.9) 是等价的, 即由 (16.5) 可写出 (16.9), 反之。由 (16.9) 亦可直接得 (16.5)。

对于  $\frac{1}{P(E)}$  我们可进行部分分式展开。例如,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{E^2 - (a + \beta)E + a\beta} f(kT) \\ &= \frac{1}{(E - a)(E - \beta)} f(kT) \\ &= \frac{1}{a - \beta} \left( \frac{1}{E - a} - \frac{1}{E - \beta} \right) f(kT) \end{aligned}$$

而欲证此, 只须从左方施用算子  $(E - a)(E - \beta)$  于各端并根据运算律及(16.8), 可见结果均为  $f(kT)$ 。

我们可用长除法或其他方法将  $1/P(E)$  展开为  $1/E$  的升幂级数。例如, 用长除法并根据

$$\frac{\text{被除式}}{\text{除式}} = \text{商式} + \frac{\text{余式}}{\text{除式}}$$

我们可归纳出如下的等式:

$$\frac{1}{E+a} = \left( \frac{1}{E} - \frac{a}{E^2} + \frac{a^2}{E^3} - \dots + \frac{(-a)^{k-1}}{E^k} \right) +$$

$$+ \frac{1}{E+a} \frac{(-a)^k}{E^k}$$

从而有

$$\frac{1}{E+a} f(kT) = \left\{ \left( \frac{1}{E} - \frac{a}{E^2} + \frac{a^2}{E^3} - \dots + \frac{(-a)^{k-1}}{E^k} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{1 + \frac{a}{E}} \frac{(-a)^k}{E^{k+1}} \right\} f(kT) \quad (16.10)$$

欲证此，只须从左方运用算子  $E+a$  于等式两端，根据 (16.8) 及运算律，如果均为  $f(kT)$ 。再者，应用这结果解差分方程时，繁杂的末项并不重要，重要的是我们能归纳出

级数的一般项  $\frac{(-a)^{k-1}}{E^k}$ ，而末项包含更高幂因子  $\frac{(-a)^k}{E^{k+1}}$

同样由长除法，我们可归纳出

$$\frac{1}{(E+a)^2} = \left( \frac{1}{E^2} - \frac{2a}{E^3} + \frac{3a^2}{E^4} - \dots + \frac{k(-a)^{k-1}}{E^{k+1}} \right)$$

$$+ \frac{1}{(E+a)^2} \left( \frac{(k+1)(-a)^k}{E^k} - \frac{k(-a)^{k+1}}{E^{k+1}} \right)$$

从而有

$$\frac{1}{(E+a)^2} f(kT) = \left\{ \left( \frac{1}{E^2} - \frac{2a}{E^3} + \frac{3a^2}{E^4} - \dots + \frac{k(-a)^{k-1}}{E^{k+1}} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\left(1 + \frac{a}{E}\right)^2} \left( \frac{(k+1)(-a)^k}{E^{k+2}} - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{k(-a)^{k+1}}{E^{k+3}} \right\} f(kT) \quad (16.11)$$

如果不计末项，由牛顿二项展开式，我们可有

$$\begin{aligned} \frac{1}{(E+a)^n} &= \frac{1}{E^n} \left( 1 + \frac{a}{E} \right)^{-n} \\ &= \frac{1}{E^n} \left( 1 - \frac{na}{E} + \frac{n(n+1)}{2!} \frac{a^2}{E^2} - \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{n(n+1)\dots(n+r-1)}{r!} \frac{(-a)^r}{E^r} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{E^n} - \frac{na}{E^{n+1}} + \frac{n(n+1)}{2!} \frac{a^2}{E^{n+2}} - \dots \\ &\quad + \frac{n(n+1)\dots(n+r-1)}{r!} \frac{(-a)^r}{E^{n+r}} + \dots \end{aligned} \quad (16.13)$$

有了算子  $E$  的这些性质，我们就能解差分方程。从一阶差分方程开始。

$$\text{例1. } x(kT+T) + ax(kT) = f(kT) \quad (16.14)$$

求  $x(kT)$ 。

解 我们所要求的  $x(kT)$  须满足

$$x(-T) = x(-2T) = x(-3T) = \dots = 0$$

因此，当  $k \leq -2$  时，方程(16.14)的左端为 0，故当  $k \leq -2$  时， $f(kT) = 0$ ，即

$$f(-2T) = f(-3T) = f(-4T) = \dots = 0$$

当  $k = -1$  时，(16.14)成为

$$x(0) + ax(-T) = f(-T)$$

即必有  $f(-T) = x(0)$

采用算子  $E$ , (16.14) 可写成

$$(E + a)x(kT) = f(kT)$$

其解为

$$x(kT) = \frac{1}{E + a} f(kT)$$

按(16.10), 不计末项, 可有

$$\begin{aligned} x(kT) = & \left( \frac{1}{E} - \frac{a}{E^2} + \frac{a^2}{E^3} - \cdots + (-a)^{k-1} \frac{1}{E^k} \right. \\ & \left. + (-a)^k \frac{1}{E^{k+1}} + (-a)^{k+1} \frac{1}{E^{k+2}} + \cdots \right) f(kT) \end{aligned} \quad (16.15)$$

其实, 这展式亦可按二项展式得出:

$$\begin{aligned} x(kT) &= \frac{1}{E} \frac{1}{1 + \frac{a}{E}} f(kT) \\ &= \frac{1}{E} \left( 1 + \frac{a}{E} \right)^{-1} f(kT) \\ &= \frac{1}{E} \left( 1 - \frac{a}{E} + \frac{a^2}{E^2} - \cdots \right. \\ & \quad \left. + (-a)^{k-1} \frac{1}{E^{k-1}} + \cdots \right) f(kT) \end{aligned}$$

按(16.7), 则(16.15)可化成

$$\begin{aligned} x(kT) = & f(kT - T) - af(kT - 2T) \\ & + a^2 f(kT - 3T) + \cdots + (-a)^{k-1} f(0) \\ & + (-a)^k f(-T) + (-a)^{k+1} f(-2T) + \cdots \end{aligned}$$

但已得  $f(-T) = x(0)$ ,  $f(-2T) = f(-3T) = \cdots = 0$ , 故得

解

$$\begin{aligned}x(kT) &= f(kT - T) - af(kT - 2T) \\&\quad + a^2 f(kT - 3T) - \dots \\&\quad + (-a)^{k-1} f(0) + (-a)^k x(0)\end{aligned}$$

这和 §12 的(12.6)完全一样。这种演算较简捷，并且一次得出通解。补函数为  $x(0)(-a)^k$  特解为

$$\begin{aligned}&f(kT - T) - af(kT - 2T) + a^2 f(kT - 3T) \\&\quad - \dots + (-a)^{k-1} f(0)\end{aligned}$$

$$\text{例2. } x(kT + 2T) + ax(kT + T) + bx(kT) = f(kT) \quad (16.16)$$

求  $x(kT)$ 。

解，所要求的  $x(kT)$  满足

$$x(-T) = x(-2T) = x(-3T) = \dots = 0$$

在(16.16)中，如果  $k \leq -3$ ，则得  $f(kT) = 0$ ，即必有

$$f(-3T) = f(-4T) = f(-5T) = \dots = 0$$

于(16.16)中代入  $k = -2$ ，可有  $x(0) = f(-2T)$

于(16.16)中代入  $k = -1$ ，可有  $x(T) + ax(0) = f(-T)$

用算子  $E$ ，则(16.16)可写成

$$(E^2 + aE + b)x(kT) = f(kT)$$

于是

$$x(kT) = \frac{1}{E^2 + aE + b} f(kT) \quad (16.17)$$

以  $\alpha$ ， $\beta$  表示右端分母的两零点。则

$$E^2 + aE + b = (E - \alpha)(E - \beta)$$

(i)  $\alpha \neq \beta$ ，则(16.17)可写成

$$\begin{aligned}
x(kT) &= \frac{1}{(E-a)(E-\beta)} f(kT) = \frac{1}{a-\beta} \left( \frac{1}{E-a} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{E-\beta} \right) f(kT) \\
&= \frac{1}{a-\beta} \left\{ \left( \frac{1}{E} + \frac{a}{E^2} + \cdots + \frac{a^{k-1}}{E^k} + \frac{a^k}{E^{k+1}} + \frac{a^{k+1}}{E^{k+2}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \cdots \right) - \left( \frac{1}{E} + \frac{\beta}{E^2} + \cdots + \frac{\beta^{k-1}}{E^k} + \frac{\beta^k}{E^{k+1}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\beta^{k+1}}{E^{k+2}} + \cdots \right) \right\} f(kT) \quad (\text{参阅 } 16.10) \\
&= \frac{1}{a-\beta} \left\{ \frac{a-\beta}{E^2} + \frac{a^2-\beta^2}{E^3} + \cdots + \frac{a^{k-1}-\beta^{k-1}}{E^k} \right. \\
&\quad \left. + \frac{a^k-\beta^k}{E^{k+1}} + \frac{a^{k+1}-\beta^{k+1}}{E^{k+2}} + \cdots \right\} f(kT)
\end{aligned}$$

应用(16.7)并考虑已得的

$$f(-3T) = f(-4T) = f(-5T) = \cdots = 0$$

可有

$$\begin{aligned}
x(kT) &= \frac{1}{a-\beta} \{ (a-\beta) f(kT-2T) \\
&\quad + (a^2-\beta^2) f(kT-3T) + \cdots \\
&\quad + (a^{k-1}-\beta^{k-1}) f(0) + (a^k-\beta^k) f(-T) \\
&\quad + (a^{k+1}-\beta^{k+1}) f(-2T) \}
\end{aligned}$$

再将(16.17)中已得的结果  $f(-T) = x(T) + ax(0)$ ,  
 $f(-2T) = x(0)$ , 代入上式得

$$x(kT) = \frac{1}{a-\beta} \{ (a-\beta) f(kT-2T)$$

$$\begin{aligned}
& + (\alpha^2 - \beta^2) f(kT - 3T) + \cdots \\
& + (\alpha^{k-1} - \beta^{k-1}) f(0) \\
& + (\alpha^k - \beta^k) [x(T) + a x(0)] \\
& + (\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}) x(0) \}
\end{aligned}$$

即所要求的解。特解为

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\alpha - \beta} \{ (\alpha - \beta) f(kT - 2T) \\
& + (\alpha^2 - \beta^2) f(kT - 3T) + \cdots \\
& + (\alpha^{k-1} - \beta^{k-1}) f(0) \} \quad \text{同(13.5)}
\end{aligned}$$

补函数为

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\alpha - \beta} \{ (\alpha^k - \beta^k) [x(T) + a x(0)] \\
& + (\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}) x(0) \} \quad \text{同(11.4)。}
\end{aligned}$$

这里一次得出补函数及特解两部分，而且演算较简。

$\alpha$  及  $\beta$  为共轭复数，结果仍能用。

(ii)  $\beta = \alpha$ ，差分方程为

$$(E - \alpha)^2 x(kT) = f(kT)$$

解为

$$\begin{aligned}
x(kT) &= \frac{1}{(E - \alpha)^2} f(kT) \\
&= \frac{1}{E^2} \left(1 - \frac{\alpha}{E}\right)^{-2} f(kT) \\
&= \frac{1}{E^2} \left\{ 1 + \frac{2\alpha}{E} + \frac{3\alpha^2}{E^2} + \cdots \right. \\
&\quad \left. + \frac{(k-1)\alpha^{k-2}}{E^{k-2}} + \frac{k\alpha^{k-1}}{E^{k-1}} + \frac{(k+1)\alpha^k}{E^k} \right. \\
&\quad \left. + \cdots \right\} f(kT)
\end{aligned}$$



$$= \left\{ \frac{1}{E^2} + \frac{2a}{E^3} + \frac{3a^2}{E^4} + \cdots + \frac{(k-1)a^{k-2}}{E^k} \right. \\ \left. + \frac{k a^{k-1}}{E^{k+1}} + \frac{(k+1)a^k}{E^{k+2}} + \cdots \right\} f(kT) \\ \text{(比较(16.11))}$$

依(16.7)并注意已得的

$$f(-3T) = f(-4T) = f(-5T) = \cdots = 0$$

可有

$$x(kT) = f(kT - 2T) + 2a f(kT - 3T) \\ + 3a^2 f(kT - 4T) + \cdots + (k-1)a^{k-2} f(0) \\ + k a^{k-1} f(-T) + (k+1)a^k f(-2T)$$

又已得  $f(-T) = x(T) + a x(0)$ ,  $f(-2T) = x(0)$ , 代入之, 最后得

$$x(kT) = f(kT - 2T) + 2a f(kT - 3T) + \cdots \\ + (k-1)a^{k-2} f(0) + k a^{k-1} [x(T) + a x(0)] \\ + (k+1)a^k x(0)$$

即为所要求的解。特解为

$$f(kT - 2T) + 2a f(kT - 3T) + \cdots + (k-1)a^{k-2} f(0) \\ \text{同(13.8)}$$

补函数为

$$k a^{k-1} [x(T) + a x(0)] + (k+1)a^k x(0) \quad \text{同(11.8)}$$

这里, 一次得出特解及补函数两部分并且演算较简。

$$\text{例3. } x(kT + nT) + a_1 x(kT + nT - T) + \cdots \\ + a_{n-1} x(kT + T) + a_n x(kT) = f(kT) \\ \text{(16.18)}$$

并且辅助方程的  $n$  个根  $a_1, a_2, \cdots, a_n$  彼此不等。

解, 由于

$$x(-T) = x(-2T) = x(-3T) = \cdots = 0$$

故在  $k \leq -n-1$  即  $k+n \leq -1$  时必有  $f(kT) = 0$  即

$$\begin{aligned} f(-nT-T) &= f(-nT-2T) \\ &= f(-nT-3T) = \cdots = 0 \end{aligned} \quad (16.19)$$

于(16.18)中令  $k = -n$  则  $x(0) = f(-nT)$

$$\begin{aligned} \text{令 } k = -n+1 \quad \text{则 } x(T) + a_1 x(0) \\ = f(-nT+T) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{令 } k = -n+2 \quad \text{则 } x(2T) + a_1 x(T) \\ + a_2 x(0) = f(-nT+2T) \end{aligned}$$

.....

令  $k = -2$  则

$$\begin{aligned} x(nT-2T) + a_1 x(nT-3T) + \cdots \\ + a_{n-2} x(0) = f(-2T) \end{aligned}$$

令  $k = -1$  则

$$\begin{aligned} x(nT-T) + a_1 x(nT-2T) + \cdots \\ + a_{n-1} x(0) = f(-T) \end{aligned}$$

(16.20)

采用算子  $E$ , 并写

$$\begin{aligned} P(E) &= E^n + a_1 E^{n-1} + a_2 E^{n-2} + \cdots + a_{n-1} E + a_n \\ &= (E - a_1)(E - a_2) \cdots (E - a_n) \end{aligned}$$

其中  $a_1, a_2, \cdots, a_n$  彼此不等, 则方程(16.18)可写成

$$P(E)x(kT) = f(kT)$$

其解为

$$x(kT) = \frac{1}{P(E)} f(kT)$$

$$= \frac{1}{(E - a_1)(E - a_2) \cdots (E - a_n)} f(kT)$$

展开为部分分式之和, 可有

$$x(kT) = \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{E - a_i} f(kT) \quad (16.21)$$

其中  $K_1 = \frac{1}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \cdots (a_1 - a_n)}$

$$K_2 = \frac{1}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \cdots (a_2 - a_n)}$$

.....

$$K_n = \frac{1}{(a_n - a_1)(a_n - a_2) \cdots (a_n - a_{n-1})}$$

令

$$\begin{aligned} \frac{K_1}{E - a_1} f(kT) = & K_1 \left( \frac{1}{E} + \frac{a_1}{E^2} + \cdots + \frac{a_1^{k-1}}{E^k} + \frac{a_1^k}{E^{k+1}} \right. \\ & + \frac{a_1^{k+1}}{E^{k+2}} + \cdots + \frac{a_1^{k+n-1}}{E^{k+n}} \\ & \left. + \frac{a_1^{k+n}}{E^{k+n+1}} + \cdots \right) f(kT) \end{aligned}$$

按(16.7)并利用(16.19)则上式化成

$$\begin{aligned} & \frac{K_1}{E - a_1} f(kT) \\ & = K_1 \{ f(kT - T) + a_1 f(kT - 2T) + \cdots + a_1^{k-1} f(0) \\ & \quad + a_1^k f(-T) + a_1^{k+1} f(-2T) + \cdots \\ & \quad + a_1^{k+n-1} f(-nT) \} \end{aligned}$$

再以(16.20)代入, 可有

$$\begin{aligned} & \frac{K_1}{E - a_1} f(kT) \\ &= K_1 \{ f(kT - T) + a_1 f(kT - 2T) + \cdots + a_1^{k-1} f(0) \\ & \quad + a_1^k [x(nT - T) + a_1 x(nT - 2T) + \cdots \\ & \quad + a_{n-1} x(0)] + a_1^{k+1} [x(nT - 2T) \\ & \quad + a_1 x(nT - 3T) + \cdots + a_{n-2} x(0)] \\ & \quad + \cdots \\ & \quad + a_1^{k+n-1} x(0) \} \end{aligned}$$

以及其他  $n - 1$  个类似的结果。代入(16.21)得

$$\begin{aligned} x(kT) &= \sum_{i=1}^n K_i \{ f(kT - T) + a_i f(kT - 2T) + \cdots \\ & \quad + a_i^{k-1} f(0) \} \\ & \quad + \sum_{i=1}^n K_i \{ [x(nT - T) + a_1 x(nT - 2T) + \cdots \\ & \quad + a_{n-1} x(0)] + a_i [x(nT - 2T) + a_1 x(nT - 3T) \\ & \quad + \cdots + a_{n-2} x(0)] + \cdots + a_i^{n-1} x(0) \} \end{aligned}$$

即为所求之解。右端前一和给出特解如(14.6), 后一和给出补函数如  $\sum_{i=1}^n C_i a_i^k$ , 其中  $C_i$  与  $k$  无关

$$\begin{aligned} \text{例4. } & x(kT + nT) + a_1 x(kT + nT - T) + \cdots \\ & \quad + a_{n-1} x(kT + T) + a_n x(kT) \\ &= f(kT) \end{aligned} \tag{16.18}$$

并且辅助方程的  $n$  个根全相等为  $a$ 。

解 关系式(16.19)及(16.20)仍成立。采用算子  $E$ , 所给方程能写成

$$(E^n + a_1 E^{n-1} + a_2 E^{n-2} + \cdots + a_{n-1} E + a_n) x(kT) = f(kT)$$

即  $(E - a)^n x(kT) = f(kT)$

于是

$$\begin{aligned} x(kT) &= \frac{1}{(E - a)^n} f(kT) \\ &= \frac{1}{E^n} \left( 1 - \frac{a}{E} \right)^{-n} f(kT) \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} x(kT) &= \frac{1}{E^n} \left( 1 + n \frac{a}{E} + \frac{n(n+1)}{2!} \frac{a^2}{E^2} \right. \\ &\quad + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} \frac{a^3}{E^3} + \dots \\ &\quad + \frac{n(n+1)\dots(n+i-1)}{i!} \frac{a^i}{E^i} \\ &\quad \left. + \frac{n(n+1)\dots(n+i)}{(i+1)!} \frac{a^{i+1}}{E^{i+1}} + \dots \right) f(kT) \\ &= \left( \frac{1}{E^n} + n \frac{a}{E^{n+1}} + \frac{n(n+1)}{2!} \frac{a^2}{E^{n+2}} + \dots \right. \\ &\quad + \frac{n(n+1)\dots(n+i-1)}{i!} \frac{a^i}{E^{n+i}} \\ &\quad \left. + \frac{n(n+1)\dots(n+i)}{(i+1)!} \frac{a^{i+1}}{E^{n+i+1}} + \dots \right) f(kT) \end{aligned}$$

按(16.7), 此可化成

$$\begin{aligned} x(kT) &= f(kT - nT) + na f(kT - nT - T) \\ &\quad + \frac{1}{2!} n(n+1) a^2 f(kT - nT - 2T) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{n(n+1)\cdots(n+i-1)}{i!} a^i f(kT - nT - iT) \\
& + \frac{n(n+1)\cdots(n+i)}{(i+1)!} a^{i+1} f(kT - nT - iT - T) \\
& + \cdots
\end{aligned}$$

再按(16.19)可得

$$\begin{aligned}
x(kT) = & \left\{ f(kT - nT) + na f(kT - nT - T) \right. \\
& + \frac{n(n+1)}{2!} a^2 f(kT - nT - 2T) + \cdots \\
& + \left. \frac{n(n+1)\cdots(k-1)}{(k-n)!} a^{k-n} f(0) \right\} \\
& + \left\{ \frac{n(n+1)\cdots k}{(k-n+1)!} a^{k-n+1} f(-T) \right. \\
& + \frac{n(n+1)\cdots k(k+1)}{(k-n+2)!} a^{k-n+2} f(-2T) + \cdots \\
& + \left. \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!} a^k f(-nT) \right\}
\end{aligned}$$

(16.22)

即为所求的解。(16.22)右端共有  $k+1$  项, 分两部分, 前后两付花括号, 各表示为  $\psi(kT)$  及  $A(kT)$ , 在最后一付花括号  $A(kT)$  中,  $f(-T)$ ,  $f(-2T)$ ,  $\cdots$ ,  $f(-nT)$  由(16.20)给出。现在我们按不同的  $k$  来考察(16.22)右端的  $k+1$  项:

$k=0$ , 右端只有1项  $f(-nT) = x(0)$ , 此应为

$A(kT)|_{k=0}$ , 因此  $\psi(kT)|_{k=0} = 0$

$k=1$ , (16.22) 右端有 2 项:

$$f(-nT+T) + na f(-nT)$$

这两项之和为  $A(kT)|_{k=1}$ , 因此,  $\psi(kT)|_{k=1} = 0$

$k=2$ , (16.22) 右端有 3 项:

$$f(-nT+2T) + na f(-nT+T) + \frac{n(n+1)}{2!} a^2 f(-nT)$$

这三项之和为  $A(kT)|_{k=2}$ , 因此  $\psi(kT)|_{k=2} = 0$

.....

$k=n-1$ , (16.22) 右端有  $n$  项:

$$f(-T) + na f(-2T) + \frac{n(n+1)}{2!} a^2 f(-3T) + \dots$$

$$+ \frac{n(n+1)\dots(2n-2)}{(n-1)!} a^{n-1} f(-nT)$$

这  $n$  项之和为  $A(kT)|_{k=n-1}$ , 因此  $\psi(kT)|_{k=n-1} = 0$

$k=n$ , (16.22) 右端有  $n+1$  项:

$$f(0) + \left\{ na f(-T) + \frac{n(n+1)}{2!} a^2 f(-2T) + \dots \right.$$

$$\left. + \frac{n(n+1)\dots(2n-1)}{n!} a^n f(-nT) \right\}$$

其中等一项  $f(0)$  为  $\psi(kT)|_{k=n}$ , 花括号中的  $n$  项为

$$A(kT)|_{k=n}$$

$k=n+1$ , (16.22) 的右端有  $n+2$  项:

$$f(T) + na f(0) + \left\{ \frac{n(n+1)}{2!} a^2 f(-T) \right. \\
+ \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} a^3 f(-2T) + \dots \\
\left. + \frac{n(n+1)\cdots(2n)}{(n+1)!} a^{n+1} f(-nT) \right\}$$

前两项  $f(T) + na f(0)$  为  $\psi(kT)|_{k=n+1}$ , 花括号中的  $n$  项为  $A(kT)|_{k=n+1}$

.....

归纳起来, 可有

$$\psi(kT) = \begin{cases} 0 & \text{在 } k=0, 1, 2, \dots, n-1 \\ f(kT - nT) + na f(kT - nT - T) \\ + \frac{n(n+1)}{2!} a^2 f(kT - nT - 2T) + \dots \\ + \frac{n(n+1)\cdots(k-1)}{(k-n)!} a^{k-n} f(0) & \text{在 } k \geq n \end{cases}$$

(共  $k - n + 1$  项)

$$A(kT) = \frac{n(n+1)\cdots(k-1)k}{(k-n+1)!} a^{k-n+1} f(-T)$$

$$+ \frac{n(n+1)\cdots k(k+1)}{(k-n+2)!} a^{k-n+2} f(-2T) + \dots$$



$$+ \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!} a^k f(-nT)$$

(共  $n$  项)

$\psi(kT)$  为特解, 同 (14.7)。

$A(kT)$  为补函数。由 (14.7) 前的 ©, 我们有

$$\frac{n(n+1)\cdots k}{(k-n+1)!} = \frac{k(k-1)\cdots(k-n+2)}{(n-1)!}$$

$$\frac{n(n+1)\cdots k(k+1)}{(k-n+2)!} = \frac{(k+1)k\cdots(k-n+3)}{(n-1)!}$$

.....

右端分子为  $k$  的  $n-1$  次多项式, 故  $A(kT)$  可化为

$$a^k(C_1 + C_2 k + \cdots + C_n k^{n-1})$$

其中  $C_1, C_2, \dots, C_n$  与  $k$  无关, 结果同 §11。

### 参 考 书

- [1] 王泽汉 数学分析基础 黑龙江科技出版社  
1984.
- [2] 李友善 自动控制原理 上册、下册 国防工业  
出版社 1980 1981
- [3] Benjamin C. Kuo Automatic control systems  
fourth edition. 1982.

[ General Information ]

姓 名 = Z 〇 〇 〇 〇 〇 〇

年 月 = 〇 〇 〇

日 期 = 1 7 5

S S 号 = 1 1 1 3 8 9 3 8

身 高 = 1 9 8 5 〇 0 1 〇 〇 1 〇

体 重 = 〇 〇 〇 〇 〇 〇 〇 〇 〇 〇

眼 睛 = 1 9 c m

头 发 = 1 . 4 0

面 容 = 〇 〇 〇 〇 〇 〇 〇 〇

学 校 名 称 = 〇 〇 〇 〇 〇 〇 〇 〇 〇 . 〇 〇 〇 〇 〇 〇 〇 〇 〇 . 〇 〇 〇 〇 〇 〇 〇 〇 〇 〇

入 学 年 月 , 1 9 8 5 .

□ □  
□ □  
□ □  
□ □  
□ □  
□ □

§ 1 □ □ □ □ □ □  
§ 2 □ □ □ □ □ □ □ □  
§ 3 □ Z □ □ □ □ □ □ □ □  
§ 4 □ Z □ □ □ □ □ □ □ □  
§ 5 □ Z □ □ □ □  
§ 6 □ □ □ □ □ Z □ □  
§ 7 □ □ Z □ □  
§ 8 □ □ Z □ □ □ □ □  
§ 9 □ Z □ □ □ □ □ □  
§ 10 □ □ Z □ □ □ □ □ □ □  
§ 11 □ □ Z □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □  
§ 12 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □  
§ 13 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □  
§ 14 □ □ □ □ □ □ n □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □  
§ 15 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □  
§ 16 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □